J. Dris
Tasari

MATEMATIKA

Untuk SMP dan MTs
Kelas VIII

PUSAT KURIKULUM DAN PERBUKUAN
Kementerian Pendidikan Nasional

J. Dris • Tasari
MATEMATIKA
Untuk SMP dan MTs Kelas VIII

Untuk Sekolah Menengah Pertama dan Madrasah Tsanawiyah

MATEMATIKA

Jilid 2

SMP dan MTs Kelas VIII

J. Dris

Tasari

PUSAT KURIKULUM PERBUKUAN

Departemen Pendidikan Nasional

MATEMATIKA

Jilid 2 untuk SMP dan MTs Kelas VIII

J. Dris; Tasari

1. Matematika **I. Judul**
II. Dris, J. **IV. Arfantony**
III. Tasari

Dris J

Matematika/penulis, J. Dris, Tasari ; editor, Arfantony ; ilustrator, Yudi W. - Jakarta :
Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Kementerian Pendidikan Nasional, 2011.
3 jil .: ilus. ; foto ; 25 cm.

untuk SMP dan MTs kelas VIII
Termasuk bibliografi
Indeks
ISBN 978-979-095-661-2 (no.jil.lengkap)
ISBN 978-979-095-663-6 (jil.2.1)
1. Matematika— Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Tasari III. Arfantony IV. Yudi W

510.07

Diterbitkan oleh Pusat Kurikulum dan Perbukuan
Kementerian Pendidikan Nasional Tahun 2011

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Kementerian Pendidikan Nasional, sejak tahun 2007, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis / penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 9 Tahun 2009 tanggal 12 Februari 2009.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis / penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Kementerian Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Kementerian Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*download*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sebagai sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2011
Kepala Pusat Kurikulum dan Perbukuan

Prakata

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas karunia-Nyalah penulis dapat menyelesaikan buku ini.

Buku Matematika untuk SMP dan MTs ini terdiri atas tiga jilid, yaitu jilid 1 untuk kelas VII, jilid 2 untuk kelas VIII, dan jilid 3 untuk kelas IX. Buku ini disusun dengan menitikberatkan pada pemahaman konsep yang benar.

Materi dalam buku ini disajikan secara sistematis, mulai dari hal yang konkret ke yang abstrak dan dari yang sederhana ke yang kompleks. Soal-soal dalam buku ini pun disajikan dengan sangat variatif, baik jenisnya maupun tingkat kesulitannya. Dengan demikian, siswa diharapkan mampu menguasai konsep yang disajikan dengan baik, bukan sekadar menghafal konsep dan mengerjakan soal dengan cepat.

Buku ini juga menyajikan soal-soal kontekstual yang merupakan penerapan konsep matematika dalam kehidupan sehari-hari. Tujuannya adalah agar siswa lebih tertarik untuk mempelajari matematika karena sangat banyak manfaatnya dalam kehidupan sehari-hari.

Namun demikian, penulis menyadari bahwa masih banyak hal yang dapat dikembangkan dari buku ini. Untuk itu, saran positif dari para pembaca, terutama guru dan siswa sebagai pengguna buku ini, sangat penulis harapkan untuk perbaikan pada edisi mendatang.

Besar harapan penulis agar buku ini dapat menjadi buku pilihan bagi siswa dan guru dalam proses pembelajaran di sekolah.

Penulis

Petunjuk Penggunaan Buku

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak sekali permasalahan yang dapat diselesaikan dengan menerapkan konsep matematika. Oleh karena itu, penting bagi kita untuk mempelajari konsep matematika.

Belajar matematika tidak terlepas dari memahami dan mengerti setiap konsep dalam matematika sehingga diperlukan suatu cara yang praktis, sistematis, dan efisien untuk menyampaikan konsep-konsep matematika. Untuk itu, buku ini disusun secara sistematis dengan tujuan agar lebih mudah dipahami oleh siswa. Buku ini juga menyajikan contoh-contoh yang aplikatif dari materi tiap bab dalam kehidupan. Hal ini bertujuan agar siswa mampu mengeksplorasi suatu persoalan (*problem solving*) dan mengajak siswa untuk mengembangkan kompetensi matematika melalui penalaran, pembuktian, melakukan komunikasi, serta memilih simbol atau lambang yang tepat untuk menyampaikan gagasan melalui bahasa matematika. Adapun komponen dari setiap bab pada buku ini adalah sebagai berikut.

Halaman Pembuka Bab

Halaman pembuka bab berisi judul bab dan tujuan pembelajaran agar siswa mengetahui dan lebih fokus dalam mempelajari materi-materi yang ada dalam bab tersebut. Selain itu, pada halaman ini juga disajikan pengantar awal bab yang menceritakan salah satu aplikasi dari materi yang akan dipelajari.

Uji Kompetensi Awal Bab

Uji kompetensi awal bab disajikan dengan tujuan untuk mengingatkan siswa pada materi sebelumnya. Ini merupakan prasyarat yang harus dimiliki oleh siswa. Soal-soal yang disajikan akan mengingatkan siswa tentang topik yang terdahulu sebagai pengantar untuk mempelajari materi yang akan dibahas.

Uraian Materi

Uraian materi disampaikan dengan bahasa lugas, mudah dipahami dan disertai dengan gambar-gambar untuk memperjelas materi yang sedang dijelaskan. Melalui gambar, diharapkan dapat membantu siswa dalam memahami materi yang sedang dijelaskan. Materi juga disajikan melalui pertanyaan-pertanyaan ataupun kegiatan (tugas) yang bertujuan agar siswa memahami konsep materi yang diajarkan melalui proses mengamati, menyelidiki (mencari) dan menemukan sendiri konsep materi tersebut.

Contoh Soal

Pada bagian ini, siswa akan diajarkan dan dilatih untuk mahir menggunakan konsep yang telah didapat di dalam uraian materi. Melalui tahap ini, siswa juga dipacu untuk dapat menemukan suatu strategi atau trik untuk menyelesaikan soal-soal yang sulit.

Latihan dan Soal-Soal Kontekstual

Bagian ini berfungsi untuk mengetahui sejauh mana pemahaman siswa terhadap materi yang telah disajikan dan mengukur kemahiran siswa untuk dapat memecahkan suatu persoalan atau masalah dalam kehidupan.

Math Quiz

Kolom ini bertujuan untuk memperkaya pengetahuan siswa dan juga sebagai ajang diskusi.

Untuk Diingat

Kolom ini disajikan untuk menambah wawasan atau informasi tambahan yang berhubungan dengan materi yang sedang dibahas.

Kegiatan

Kolom ini disajikan dalam bentuk tugas mandiri atau berkelompok. Tugas-tugas yang diberikan bertujuan untuk memperkuat pemahaman siswa terhadap materi tiap bab.

Rangkuman

Rangkuman disajikan di setiap akhir bab berupa ringkasan materi pada bab yang bersangkutan. Hal ini untuk melatih siswa bagaimana cara menyarikan materi-materi penting pada bab yang bersangkutan.

Uji Kompetensi

Uji kompetensi berupa soal-soal yang bervariasi jenis dan tingkat kesulitannya yang disajikan di setiap akhir bab. Bagian ini disajikan dengan tujuan melatih siswa untuk mengingat kembali pemahaman konsep secara menyeluruh yang telah diajarkan dengan mengerjakan setiap soal-soal yang diberikan.

Daftar Isi

Kata Sambutan iii
Prakata iv
Petunjuk Penggunaan Buku v
Daftar Isi vi

Bab 1 Faktorisasi Suku Aljabar

A. Operasi Hitung Bentuk Aljabar 2
B. Pemfaktoran Bentuk Aljabar 11
C. Operasi Pecahan Bentuk Aljabar 17
D. Aplikasi Faktorisasi Suku Aljabar dalam Kehidupan 24
Uji Kompetensi Bab 1 27

Bab 2 Relasi dan Fungsi

A. Relasi 30
B. Fungsi 34
C. Nilai Fungsi 45
D. Aplikasi Konsep Fungsi dalam Kehidupan 49
Uji Kompetensi Bab 2 52

Bab 3 Persamaan Garis Lurus

A. Sifat-Sifat Persamaan Garis Lurus 56
B. Persamaan Garis dan Koordinat Titik Potong Dua Garis 66
C. Aplikasi Persamaan Garis Lurus dalam Kehidupan 73
Uji Kompetensi Bab 3 76

Bab 4 Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

A. Bentuk-Bentuk Sistem Persamaan Linear Dua Variabel 80
B. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel 84
C. Aplikasi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dalam Kehidupan 89
Uji Kompetensi Bab 4 92

Bab 5 Dalil Pythagoras

A. Menjelaskan dan Menentukan Dalil Pythagoras 96
B. Cara Menggunakan Dalil Pythagoras 102
C. Aplikasi Dalil Pythagoras dalam Kehidupan 113
D. Rumus Jarak (Materi Pengayaan) 114
Uji Kompetensi Bab 5 116
Latihan Ulangan Umum Semester 1 119

Bab 6 **Lingkaran**

A. Lingkaran dan Bagian-Bagiannya 124
B. Besaran-Besaran pada Lingkaran 126
C. Aplikasi Konsep Lingkaran dalam Kehidupan 140
Uji Kompetensi Bab 6 143

Bab 7 **Garis Singgung Lingkaran**

A. Sifat-Sifat Garis Singgung Lingkaran 146
B. Panjang Garis Singgung 149
C. Aplikasi Garis Singgung dalam Kehidupan 158
D. Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar Segitiga 159
Uji Kompetensi Bab 7 162

Bab 8 **Kubus dan Balok**

A. Bagian-Bagian Kubus dan Balok 166
B. Cara Melukis Kubus dan Balok 174
C. Jaring-Jaring Kubus dan Balok 177
D. Luas Permukaan Kubus dan Balok 181
E. Volume Kubus dan Balok 184
F. Aplikasi Kubus dan Balok dalam Kehidupan 187
Uji Kompetensi Bab 8 190

Bab 9 **Limas dan Prisma Tegak**

A. Bagian-Bagian Limas dan Prisma Tegak 194
B. Besaran-Besaran pada Limas dan Prisma Tegak 202
C. Aplikasi Limas dan Prisma Tegak dalam Kehidupan 208
Uji Kompetensi Bab 9 211

Latihan Ulangan Umum Semester 2 214
Daftar Pustaka 218
Glosarium 219
Daftar Simbol dan Notasi 220
Kunci Jawaban 221
Indeks 225

BAB 1

Faktorisasi Suku Aljabar

Sumber: Ilmu Pengetahuan Populer

Tujuan Pembelajaran

- Menyelesaikan operasi bentuk aljabar
- Menentukan faktor-faktor suku aljabar
- Menyelesaikan operasi pecahan bentuk aljabar.

Ketika di kelas VII kalian sudah mempelajari konsep aljabar penjumlahan dan pengurangan suku-suku sejenis, serta perkalian dan pembagian suku-suku sejenis dan tidak sejenis. Masih ingatkah kalian dengan materi itu?

Kalian harus memahami materi itu sebelum mempelajari bab ini. Pada pembahasan bab ini materi tersebut akan digunakan dan akan dikembangkan lagi sampai operasi tambah, kurang, kali, bagi, dan pangkat untuk suku satu, suku dua, dan suku banyak.

Penerapan konsep aljabar dalam kehidupan sehari-hari sangat banyak, salah satunya di bidang kimia.

Seorang ilmuwan kimia ingin memasukkan cairan alkohol dan asam cuka ke dalam tabung reaksi. Volume alkohol dan asam cuka yang dimasukkan ke dalam tiap tabung harus sama dan tidak ada cairan yang tersisa. Volume alkohol yang tersedia 60 cc dan asam cuka 40 liter.

Agar volume alkohol dan asam cuka yang dimasukkan ke dalam tiap tabung sama, dapatkah kalian menentukan jumlah tabung yang dibutuhkan? Berapakah volume tiap cairan zat yang harus dimasukkan ke dalam tiap tabung agar volume alkohol dan asam cuka tiap tabung sama? Apakah hal tersebut dapat dikerjakan dengan faktorisasi suku aljabar?

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Jabarkanlah
   a. $2(x + y) = ...$ b. $-2(x - y) = ...$
2. Jabarkanlah
   a. $(a + b)(a - b) = ...$
   b. $(a + b)(a + b) = ...$
   c. $(a - b)(a - b) = ...$
3. Hitunglah
   a. $2a + 3a = ...$
   b. $7b - 3b = ...$
4. Sederhanakanlah
   a. $2a + 3b + 4a + 7b = ...$
   b. $5ab - 3a - 2ab + 5a = ...$

A Operasi Hitung Bentuk Aljabar

Di kelas VII kalian telah mempelajari operasi hitung bentuk aljabar. Masih ingatkah kalian syarat suatu suku dapat dijumlahkan atau dikurangkan? Untuk mengingat kembali, perhatikan penjelasan berikut.

1 Istilah-Istilah dalam Bentuk Aljabar

Di kelas VII kalian telah dikenalkan dengan penjumlahan dan pengurangan bentuk aljabar, misalnya $8x^2 + 2xy + 2$. Bentuk aljabar tersebut terdiri atas 3 suku, yaitu $8x^2$, $2xy$, dan 2. Huruf x^2 dan xy disebut *peubah (variabel)*, sedangkan angka di depan peubah disebut *koefisien*. Angka 2 yang tidak diikuti dengan peubah disebut *konstanta (bilangan tetap)*. Pada bentuk $2xy$, angka 2, x dan y dinamakan *faktor*.

Bentuk $8x^2$, $2xy$, dan 2 dinamakan *suku*. Suku-suku pada bentuk aljabar ada yang sejenis dan tidak sejenis.

Dapatkah kalian menjelaskan perbedaan antara koefisien dan konstanta dalam bentuk aljabar?

2 Suku-Suku Sejenis dan Tidak Sejenis

Bentuk $3x$ dan $0,5x$, $4ax$ dan $(-2a + 2)x$, $7x^2$ dan $3x^2$ disebut *suku-suku sejenis* dalam x, sedangkan $7x$ dan $8y$, $2x$ dan $3xy$ bukan suku-suku sejenis, biasa disebut *suku-suku tak sejenis.*

Untuk lebih memahami istilah di atas, coba kalian perhatikan penjelasan tabel di bawah ini.

No.	Suku	Sejenis/Tak Sejenis
a.	$8x$, $6x$, dan $9x$	Sejenis
b.	$4y^2$, $3y^2$, dan $8y^2$	Sejenis
c.	$2xy^2$, $5x^2y$, dan $6x^3y$	Tidak Sejenis
d.	$4pq$, $8xy$, dan $5ab$	Tidak Sejenis
e.	$6x^2y$, $2xy^2z$, dan $4xyz^2$	Tidak Sejenis

Pangkat

Suatu nilai yang diletakkan di sebelah kanan atas suatu bilangan atau peubah, contoh: x^n, dibaca x pangkat n dan mempunyai arti, x dikalikan dengan dirinya sendiri sampai n kali.

- Pada (a) suku-sukunya sejenis karena peubahnya sama.
- Pada (b) suku-sukunya sejenis karena peubah dan pangkat peubahnya sama.
- Pada (c) suku-sukunya tidak sejenis karena pangkat peubahnya berbeda.
- Pada (d) suku-sukunya tidak sejenis karena peubahnya berbeda.
- Pada (e) suku-sukunya tidak sejenis karena peubah dan pangkat peubahnya berbeda.

Apa yang dapat kalian simpulkan mengenai pengertian suku sejenis dalam suatu bentuk aljabar? Buatlah definisinya dengan menggunakan kata-katamu sendiri.

Bentuk aljabar yang mempunyai suku-suku yang tidak sejenis lebih dari satu disebut *suku banyak* atau *polinomial*. Misalnya $2x + 4y$, $6 + 2x + 3x^2$, dan $7a + 8b + c$.

Pada operasi bentuk aljabar juga dikenal suku banyak sebagai berikut.

a. *Suku dua* atau *binomial* adalah suku banyak dengan dua suku, misalnya $2x + 3x^2$, $2a + b$;

b. *Suku tiga* atau *trinomial* adalah suku banyak dengan tiga suku, misalnya $x^2 + x + 7$, $2x + 3y + z$.

3 Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Aljabar

Di kelas VII kalian telah belajar penjumlahan dan pengurangan bentuk aljabar. Masih ingatkah kalian cara mengerjakan penjumlahan $3x + 2x$? *Coba kalian kerjakan sendiri dengan menggunakan sifat perkalian bilangan bulat yang telah kalian pelajari.*

Bagaimana hasil penjumlahannya? Apakah hasilnya sama dengan cara berikut? $3x$ dapat diartikan $x + x + x$ sehingga $3x + 2x = (x + x + x) + (x + x) = 5x$.

Selanjutnya untuk mempermudah penjumlahan dan pengurangan bentuk aljabar, ada beberapa sifat penting yang berlaku pada penjumlahan dan pengurangan bentuk aljabar.

a. Sifat komutatif

Jika a dan b merupakan bentuk aljabar maka berlaku sifat komutatif $a + b = b + a$. Selidikilah sifat tersebut dengan mengganti $a = 2x$ dan $b = 3x$.

b. Sifat asosiatif

Jika a, b dan c merupakan bentuk aljabar maka berlaku sifat asosiatif $a + (b + c) = (a + b) + c$. Selidikilah dengan mengganti $a = 3x$, $b = 4x$, dan $c = -2x$.

c. Sifat distributif terhadap penjumlahan dan pengurangan

Jika a, b dan c merupakan bentuk aljabar maka berlaku:

(i) sifat distributif penjumlahan, $a(b + c) = ab + ac$

(ii) sifat distributif pengurangan, $a(b - c) = ab - ac$

Selidikilah sifat di atas dengan mengganti $a = x$, $b = 3x$, dan $c = -2x$.

d. Sifat lawan

Amati hal berikut dan ingat kembali sifat aturan tanda pada operasi perkalian bilangan bulat yang telah kalian pelajari di kelas VII.

$8 - 2 = 6$ sama dengan $8 + (-2)$ karena $+ (-2) = -2$

$8 - 0 = 8$ sama dengan $8 + (0)$ karena ....

$8 - (-1) = \ldots$ sama dengan ....

$x - y = \ldots$ sama dengan $x + (-y)$ karena $+ (-y) = -y$

Coba kalian tebak dan jawab sendiri titik-titik di atas pada bukumu. Bandingkan dengan jawaban teman-temanmu. Hal apa yang dapat kalian simpulkan? Apakah sama dengan kesimpulan berikut?

> Mengurangkan b dari a sama dengan menjumlahkan a dengan lawan dari b, ditulis $a - b = a + (-b)$.

Selanjutnya coba kalian perhatikan bentuk aljabar di bawah ini.

$$4x + 2y + 6z + 8x + 3y - 9z$$

Bentuk aljabar yang kompleks seperti di atas dapat disederhanakan dengan mengelompokkan suku-suku yang sejenis.

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 6z + 8x + 3y - 9z &= (4x + 8x) + (2y + 3y) + (6z - 9z) \\ &= 12x + 5y - 3z \end{aligned}$$

Selain dengan mengelompokkan suku-suku sejenis, penjumlahan dan pengurangan suku-suku sejenis dari bentuk aljabar dapat pula dipermudah dengan cara *mengelompokkan* dan *menyusun ke bawah*.

Contoh SOAL

1. Sederhanakan bentuk-bentuk aljabar di bawah ini.
   a. $3x - 4y + 8x$
   b. $3xy + 8az + 3z - 4y$

Penyelesaian:

Sifat komutatif

a. $3x - 4y + 8x = 3x + 8x - 4y$ ← Sifat distributif

$= (3 + 8)x - 4y$

$= 11x - 4y$

b. $3xy + 8az + 3z - 4y$
$= 3xy - 4y + 8az + 3z$
$= (3x - 4)y + (8a + 3)z$

2. Kurangkan $6a + 8b - 4c$ dengan $2a - 3b + c$ dengan cara:
   a. mengelompokkan
   b. menyusun ke bawah

Penyelesaian:

a. mengelompokkan
$(6a + 8b - 4c) - (2a - 3b + c)$
$= 6a + 8b - 4c - 2a + 3b - c$
$= (6a - 2a) + (8b + 3b) + (-4c - c)$
$= (6 - 2)a + (8 + 3)b + (-4 - 1)c$
$= 4a + 11b + (-5)c$
$= 4a + 11b - 5c$
(Sifat lawan)

b. menyusun ke bawah

$$\begin{array}{r} 6a + 8b - 4c \\ 2a - 3b + c \\ \hline 4a + 11b - 5c \end{array} -$$

Dari uraian materi dan contoh soal di atas, apa yang dapat kalian simpulkan mengenai syarat suatu suku dapat dijumlahkan atau dikurangkan?

LATIHAN 1

1. Tentukan nama suku dan koefisien a dari suku-suku banyak di bawah ini.
   a. $6a - 6$
   b. $3a^3 - 2a^2 - 4a + 7$
   c. $5a - 6x + 7$
   d. $4a^3 - 2a^2 - 7 + 6$
   e. $6a^2 + 3a$
   f. $7xy - 2xa$
2. Tentukan penjumlahan suku banyak berikut.
   a. $12a + 3b$ dan $-4a + 11b + 6$
   b. $2x - 3y + 8$ dan $5y + 6x - 1$
   c. $7xy - 2y - 3z$ dan $2x - 5y - 6z$
   d. $6ax - 7ay + 10by$ dan $7ax + 8ay - 10by$
3. Sederhanakanlah.
   a. $(a + b^2 - c) + (3a - 4b^2 + c) + (7a + 3b^2 - 3c)$
   b. $(2x^2 - 3y) + (3x^2 + 4z)$
   c. $(2x^2 - 4y^3) - (3x^2 - 7y^3)$
   d. $(2x - 4y + 6z) - (8x - 11y + 13z) - (2x - 6y - 2z)$

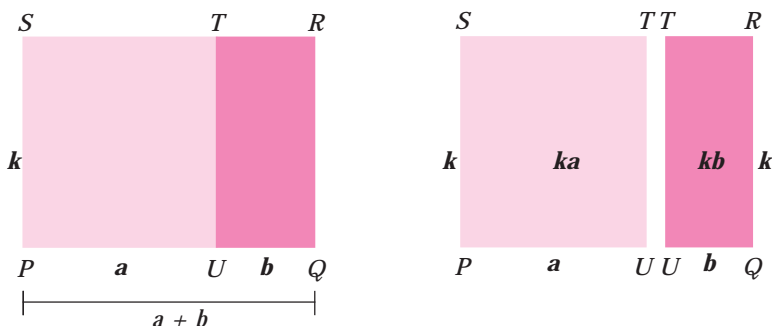
4 Perkalian Bentuk Aljabar

a. Perkalian suatu Bilangan dengan Suku Dua

Sebelum kalian memahami perkalian suatu bilangan dengan suku dua, ada beberapa aturan tanda pada operasi perkalian bilangan bulat. Aturan tersebut adalah sebagai berikut.

$$(+1) \times (+1) = +1$$
$$(-1) \times (+1) = -1$$
$$(+1) \times (-1) = -1$$
$$(-1) \times (-1) = +1$$

Perkalian suatu bilangan dengan suku dua dapat diselesaikan dengan menggunakan **sifat distributif perkalian** terhadap *penjumlahan* atau *pengurangan*.

Untuk menunjukkan sifat distributif perkalian tersebut, coba kalian perhatikan penjelasan Gambar 1.1.

Gambar 1.1 ▭ *PQRS*

$L \,▭\, PQRS = k(a + b)$ $\qquad$ $L \,▭\, PQRS = L \,▭\, PUTS + L \,▭\, UQRT$

$= ka + kb$

$$k(a + b) = ka + kb$$

Dari uraian di atas kita dapat menyimpulkan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan seperti berikut.

Jika $k \in R$, $(a + b)$ adalah suku dua, maka $k(a + b) = ka + kb$ (sifat distributif terhadap penjumlahan)

Dengan perumpamaan yang serupa, cobalah kamu buktikan sifat distributif perkalian terhadap pengurangan. Jika kamu benar maka kamu akan mendapati hubungan seperti berikut.

Jika $k \in R$, $(a - b)$ adalah suku dua maka $k(a - b) = ka - kb$ (sifat distributif terhadap pengurangan)

Contoh SOAL

Selesaikanlah perkalian di bawah ini.

a. $4(x + y)$ $\qquad$ b. $-3(2x - 3y)$ $\qquad$ c. $-2x(3x - 4y + z)$

Penyelesaian:

Untuk mempermudah menyelesaikan soal-soal di atas, gunakanlah sifat distributif dan cara skema berikut ini.

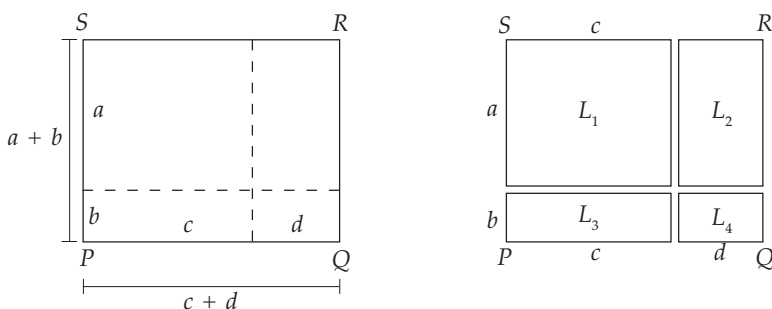
a. $4(x + y) = 4\,(x + y) = 4x + 4y$ ⇐ Sifat distributif

c. $-3(2x - 3y) = -3(2x - 3y) = -3(2x) - 3(-3y) = -6x + 9y$

aturan tanda

d. $-2x(3x - 4y + z) = -2x(3x - 4y + z) = -2x(3x) - 2x(-4y) - 2x(z) = -6x^2 + 8xy - 2xz$

b. Perkalian Suku Dua dengan Suku Dua

Untuk mengetahui sifat distributif untuk perkalian suku dua perhatikan penjelasan berikut.

Gambar 1.2 ▭ *PQRS*

L ▭ $PQRS = (a + b)(c + d)$

L ▭ $PQRS = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$
$= ac + ad + bc + bd$
$= a(c + d) + b(c + d)$

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$$

Sifat-sifat distributif dapat digunakan untuk menjabarkan perkalian suku dua, yakni sebagai berikut.

$(a + b)\ (a + b) = a(a + b) + b(a + b)$
$= a^2 + ab + ba + b^2$
$= a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)\ (a - b) = a(a - b) + b(a - b)$
$= a^2 - ab + ba - b^2$
$= a^2 - b^2$

$(a - b)\ (a - b) = a(a - b) - b(a - b)$
$= a^2 - ab - ba + b^2$
$= a^2 - 2ab + b^2$

Math Quiz

Bentuk penjabaran perkalian suku dua dengan suku tiga atau lebih, dapat juga dilakukan dengan sifat distributif.

Coba diskusikan dengan temanmu. Bagaimana bentuk penjabaran perkaliannya?

Contoh SOAL

Dengan menggunakan sifat distributif dan skema, jabarkanlah perkalian suku dua di bawah ini.

a. $(3a + 6)\ (2a - b)$ c. $(3 - 2x)\ (4x - 8)$

b. $(2a + 3)\ (a + 7)$

Penyelesaian:

Menggunakan sifat distributif

a. $(3a + 6)\ (2a - 6) = 3a(2a - 6) + 6(2a - 6)$
$= 6a^2 - 18a + 12a - 36$
$= 6a^2 - 6a - 36$

b. $(2a + 3)\ (a + 7) = 2a(a + 7) + 3(a + 7)$
$= 2a^2 + 14a + 3a + 21$
$= 2a^2 + 17a + 21$

c. $(3 - 2x)\ (4x - 8) = 3(4x - 8) - 2x(4x - 8)$
$= 12x - 24 - 8x^2 + 16x$
$= -8x^2 + 28x - 24$

LATIHAN 2

1. Uraikanlah perkalian berikut.
   a. $6(3a + 2b)$
   b. $-5(2a + b)$
   c. $7a(3a - 3b)$
   d. $-2b^2(-2a - 3b)$
   e. $6a(3a - 2b + c)$
   f. $-c^2(4a - 3b - 2)$
2. Sederhanakanlah bentuk-bentuk aljabar berikut.
   a. $2(-2a + 7b) - (a + 4b)$
   b. $6(2a^2 + 3a^2b - 7ab) - 4a(5a - 2b + 5ab)$
   c. $2(ab + b - 3c) - 2(c - b + 6a)$
   d. $4b^2(3a - 4b - c) - 5a^2(a - b - c)$
3. Jika $A = 2a + 3b + 4c$
   $B = 4a - 3b - c$, dan
   $C = 2a - b - c$
   hitunglah:
   a. $A + B - C$
   b. $2A + 3B - C$
   c. $3A - 2B - C$
   d. $-4A + 2B - C$
   e. $-5A - 3B + C$
   f. $2A - 4B + 3C$
4. Nyatakan bentuk perkalian dua suku berikut menjadi bentuk penjumlahan.
   a. $(a + 2)(a + 3)$
   b. $(2a + 3b)(2a - 3b)$
   c. $(a - 2b)(a - 3b)$
   d. $(2y - 3)(y + 5)$
   e. $(2x + 3)(3x - 2)$

5 Pemangkatan Suku

a. Pemangkatan Suku

Pangkat atau eksponen adalah perkalian berulang, misalnya: $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$. Untuk pemangkatan suku juga dilakukan hal yang sama, misalnya: $a^3 = a \times a \times a$ dan $(a + 1)^2 = (a + 1) \times (a + 1) = a^2 + 2a + 1$.

a^3 adalah contoh pemangkatan suku satu

$(a + 1)^2$ adalah contoh pemangkatan suku dua

Contoh SOAL

Tentukan:

a. $(8a)^2$
b. $(-9ab)^2$
c. $(2a + 3b)^2$
d. $(2a - 5b)^2$

Penyelesaian:

a. $(8a)^2 = 8a \times 8a$
$= 64a^2$

b. $(-9ab)^2 = (-9ab) \times (-9ab)$
$= 81a^2b^2$

c. $(2a + 3b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2$
$= 4a^2 + 12ab + 9b^2$

d. $(2a - 5b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(-5b) + (-5b)^2$
$= 4a^2 - 20ab + 25b^2$

b. Pemangkatan Suku Dua

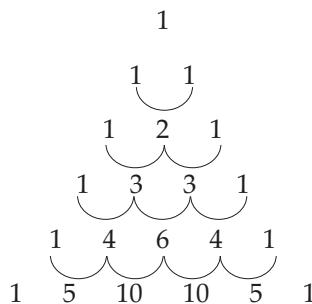
Kalian telah mengetahui pemangkatan suku satu dan suku dua sederhana. Sekarang, *kalian diminta untuk menjabarkan pemangkatan suku dua dengan bentuk (a + b) untuk pangkat yang lebih dari dua. Kerjakan penjabarannya itu sendiri dan bandingkan hasilnya dengan teman-temanmu. Apakah hasilnya sama seperti di bawah ini.*

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Coba kalian amati pola bilangan yang terbentuk dari koefisien variabel-variabel hasil pemangkatan di atas, yaitu 1, 3, 3, 1 dan 1, 4, 6, 4, 1. *Dapatkah kalian menemukan cara yang mudah untuk menentukan koefisien variabel-variabel hasil pemangkatan dengan mengamati pola bilangan yang terbentuk?*

Apakah cara yang kalian dapatkan sama dengan cara yang ditemukan oleh Blaise Pascal (1623 – 1661) pada uraian berikut?

Pemangkatan suku dua	**Pola dasar segitiga Pascal**
$(a + b)^0$	1
$(a + b)^1$	1 1
$(a + b)^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5$	1 5 10 10 5 1

Contoh SOAL

Tentukan hasil pemangkatan berikut ini.

a. $(2a + b)^2$

b. $(a - b)^2$

c. $(a - b)^3$

Penyelesaian:

a. $(2a + b)^2 = (2a)^2 + 2\,(2a)(b) + (b)^2$
$= 4a^2 + 4ab + b^2$

b. $(a - b)^2 = (a + (-b))^2$
$= a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2$
$= a^2 - 2ab + b^2$

c. $(a - b)^3 = (a + (-b))^3$
$= a^3 + 3(a^2)(-b) + 3(a)(-b)^2 + (-b)^3$
$= a^3 - 3a^2b + 3(a)(b^2) + (-b^3)$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Setelah memerhatikan contoh soal di atas, jelaskan perbedaan pemangkatan suku dua (a + b) dengan suku dua bentuk yang lain.

LATIHAN 3

1. Tentukanlah pemangkatan bentuk aljabar berikut.
   a. $(4a)^2$
   b. $(-6a^2b)^2$
   c. $(-9x^2)^3$
   d. $(4p^3)^2$
   e. $(-2x^2y^3)^3$
   f. $(5\,st^2)^4$
2. Selesaikanlah pemangkatan bentuk aljabar berikut.
   a. $(4x - 3x)^4$
   b. $(3y^2 - 2x)^2$
   c. $(x - 2y)^3$
   d. $(3p - q)^5$
   e. $(7a+ 2b)^3$
   f. $(3p - 6)^6$

6 Pembagian Suku Sejenis dan Suku tidak Sejenis

Pembagian suku-suku sejenis dan tidak sejenis pada pembagian bentuk aljabar memiliki aturan yang sama dengan operasi pembagian bilangan bulat. Pembagian pada bentuk aljabar akan lebih mudah dilakukan dengan mencari *faktor-faktor persekutuan* dari *suku yang dibagi* dan *suku pembaginya.*

$$\frac{9ay}{3a} = \frac{3a \times 3y}{3a} \Rightarrow \text{(faktor persekutuan } 9ay \text{ dan } 3a \text{ adalah } 3a)$$
$$= 3y$$

Berikut ini sifat-sifat yang berlaku pada pembagian bentuk aljabar. Untuk a dan b bilangan bulat positif berlaku:

a. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ dan $a^x \times a^y = a^{x+y}$

b. $a^x : \frac{1}{a^y} = a^x \times a^y = a^{x+y}$

c. sifat distributif pemangkatan terhadap pembagian

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ dan $\left(\frac{a^k}{b^k}\right)^x = \frac{a^{kx}}{b^{kx}}$

Contoh SOAL

Sederhanakanlah bentuk aljabar berikut.

a. $\frac{5a^4}{a^2b}$ (Pembagian suku tak sejenis)

b. $\frac{3(a+b)}{2(a+b)}$ (Pembagian suku sejenis)

c. $\frac{3}{4}a^2 : \frac{1}{a^2}$ (Pembagian suku sejenis)

d. $\left(\frac{-2a}{b}\right)^3$ (Pembagian suku tak sejenis)

Penyelesaian:

a. $\frac{5a^4}{a^2b} = \frac{5a^{4-2}}{b} = \frac{5a^2}{b}$

b. $\frac{3(a+b)}{2(a+b)} = \frac{3}{2}$

c. $\frac{3}{4}a^2 : \frac{1}{a^2} = \frac{3}{4}a^2 \times a^2 = \frac{3}{4}a^4$

d. $\left(\frac{-2a}{b}\right)^3 = \frac{(-2)^3 a^3}{b^3} = \frac{-8a^3}{b^3}$

LATIHAN 4

1. Sederhanakanlah bentuk aljabar berikut.

a. $\frac{12xy}{3x}$

b. $\frac{15abc}{3ac}$

c. $\frac{-2x}{18x^2}$

d. $\frac{2kl}{\frac{k}{2l}}$

e. $\frac{4\,(2a - b)^3}{2\,(-b + 2a)^3}$

f. $\frac{2a^2bc - 3ab^2}{ab}$

g. $\frac{\frac{3}{2}a^2(-b)^2}{2(ab)^2}$

h. $\left[\frac{9a^3(-b)^2}{-3b^2}\right]^2$

2. Tentukanlah bentuk paling sederhana dari pembagian berikut.
   a. $12a^2b^3 : 2ab$
   b. $40x^2y : (-5x)$
   c. $(2k^2l \times 3k) : (-3kl)$
   d. $36x^2y^4z^3 : (2xyz \times 3z)$
   e. $18r^2st$:

B Pemfaktoran Bentuk Aljabar

Pada subbab sebelumnya, kita telah mempelajari *perkalian* suku dua dengan menggunakan sifat distributif yang menghasilkan bentuk *penjumlahan*, yaitu $k(a + b) = ka + kb$. Jika bentuk *penjumlahan* $ka + kb$ diubah ke bentuk perkalian $k(a + b)$ dengan memisahkan *faktor persekutuan* (*faktor yang sama*), berarti kita telah melakukan *pemfaktoran* (*faktorisasi*) bentuk $ka + kb$ menjadi faktor-faktornya, yaitu k dan $(a + b)$.

Pemfaktoran dalam bentuk aljabar adalah mengubah bentuk penjumlahan suku-suku menjadi perkalian faktor-faktornya.

1 Pemfaktoran Bentuk *ax* + *ay* dan *ax* – *ay*

Pemfaktoran bentuk $ax + ay$ dapat dilakukan dengan menggunakan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, sedangkan bentuk $ax - ay$ dapat dilakukan dengan menggunakan sifat distributif terhadap pengurangan. Suku-suku yang memiliki faktor yang sama dapat difaktorkan dengan menggunakan sifat distributif sebagai berikut.

$$ax + ay = a(x + y)$$
$$ax - ay = a(x - y)$$

Contoh SOAL

Faktorkanlah bentuk-bentuk aljabar di bawah ini.

a. $4ax + 2ay$
b. $ax + bx + ay + by$
c. $8a^2b^2 + ab$
d. $2x^2y + 6x^2y^2 - 10xy^2$

Penyelesaian:

a. $4ax + 2ay = 2a(2x + y)$
   (Gunakan sifat distributif)

b. $ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by)$
   $= x(a + b) + y(a + b)$
   $= (x + y)(a + b)$
   (Gunakan sifat distributif)

c. $8a^2b^2 + ab = ab(8ab) + (ab)(1) = ab(8ab + 1)$
   (Pisahkan faktor yang sama)

d. $2x^2y + 6x^2y^2 - 10xy^2$
   $= (2xy)x + (2xy)\,3xy - (2xy)5y$
   $= (2xy)(x + 3xy - 5y)$
   (Pisahkan faktor yang sama)

2 Pemfaktoran Bentuk $x^2 + 2xy + y^2$ dan $x^2 - 2xy + y^2$

Pemfaktoran bentuk $x^2 + 2xy + y^2$ dan $x^2 - 2xy + y^2$ akan menghasilkan suatu *bentuk kuadrat*. Cara pemfaktoran dari bentuk-bentuk di atas dapat kalian pahami pada uraian berikut ini.

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= x^2 + xy + xy + y^2 \\ &= x(x + y) + y(x + y) \\ &= (x + y)(x + y) \\ &= (x + y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 &= x^2 - xy - xy + y^2 \\ &= x(x - y) - xy + y^2 \\ &= x(x - y) - y(x - y) \\ &= (x - y)(x - y) \\ &= (x - y)^2 \end{aligned}$$

Dari uraian di atas, diperoleh rumus pemfaktoran bentuk kuadrat sempurna.

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Contoh SOAL

Dengan menggunakan rumus bentuk pemfaktoran di atas, faktorkanlah bentuk aljabar di bawah ini.

a. $x^2 + 6x + 9$
b. $4x^2 - 4x + 1$
c. $x^2 - 2x + 1$
d. $9a^2 + 12a + 4$

Penyelesaian:

a. $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2\,(3x) + 3^2 = (x + 3)^2$

b. $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2(2x) + 1^2 = (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 = (2x - 1)^2$

c. $x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2(x) + (1)^2 = (x - 1)^2$

d. $9a^2 + 12a + 4 = (3a)^2 + 2(3a)(2) + (2)^2 = (3a + 2)^2$

3 Pemfaktoran Bentuk Selisih Dua Kuadrat

Bentuk $(x^2 - y^2)$ ini sering disebut selisih dua kuadrat. Hasil pemfaktoran dari bentuk selisih dua kuadrat dapat dinyatakan sebagai perkalian dua faktor sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= x^2 - xy + xy - y^2 \\ &= x(x - y) + y(x - y) \\ &= (x + y)(x - y) \end{aligned}$$

Dari uraian di atas diperoleh rumus pemfaktoran bentuk $x^2 - y^2$ sebagai berikut.

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Math Quiz

Bagaimanakah pemfaktoran dari bentuk berikut?

a. $ab^2 - ac^2$

b. $ax - by + ay - bx$

Diskusikanlah dengan temanmu, apakah hasil pemfaktorannya sama bentuknya dengan hasil pemfaktoran selisih dua kuadrat?

Contoh SOAL

Dengan menggunakan rumus bentuk pemfaktoran di atas, faktorkanlah bentuk aljabar di bawah ini.

a. $x^2 - 36$

b. $3a^3 - 27ab^2$

c. $x^4 - y^4$

Penyelesaian:

a. $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x - 6)(x + 6)$

b. $3a^3 - 27ab^2 = 3a(a^2 - 9b^2)$
$= 3a(a^2 - (3b)^2)$
$= 3a(a + 3b)(a - 3b)$

c. $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2$
$= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$
$= (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

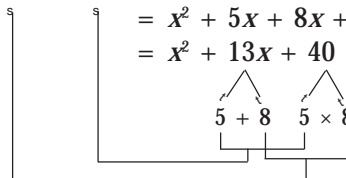
LATIHAN 5

1. Faktorkanlah.
   a. $100ab - 15ac$
   b. $15ab - 20ab^2$
   c. $9xy^2 + 15x^3$
   d. $63x^2w + 28xw^2$
   e. $p(x + y) - r(x + y)$
   f. $15ab - 20b^2 - 25bc$
2. Faktorkanlah.
   a. $ac + bc + ad + bd$
   b. $pr + ps + 2qr + 2qs$
   c. $2x - 2y - xz + yz$
   d. $ac - 3ad + 2bc - 6bd$
3. Faktorkanlah.
   a. $(a + b)^2 - 4$
   b. $(4x - 3y)^2 - 25$
   c. $x^2 + y^2 - a^2 - 2xy$
   d. $(4x + 3y)^2 - (2x + 9)^2$
4. Faktorkanlah.
   a. $x^2 + 6x + 9$
   b. $x^2 - 10x + 25$
   c. $x^2 + 4xy + 4y^2$
   d. $25x^2 + 20xy + 4y^2$
   e. $x^4 - 22x^2 + 121$
   f. $a^3 + 4a^2 + 4a$
   g. $a^2 - 2ab + b^2$
   h. $a^2x^2 + 2axc + c^2$
5. Faktorkanlah.
   a. $4p^2 - 36$
   b. $225\,a^2b^2 - 361$
   c. $x^2 - 49$
   d. $81x^2 - 64b^2$
   e. $2x^2 - 50y^2$
   f. $4a^4 - b^4$
   g. $a^3b - 4ab^3$
   h. $p^4 - 144$

4 Pemfaktoran Bentuk $x^2 + px + q$

Untuk mengetahui cara memfaktorkan bentuk $x^2 + px + q$, coba kalian amati perkalian berikut.

$(x + 8)(x + 5) = x(x + 5) + 8(x + 5)$
$= x^2 + 5x + 8x + 40$
$= x^2 + 13x + 40$

5 + 8   5 × 8

Coba kalian amati proses pemfaktoran dari salah satu contoh bentuk $x^2 + px + q$, yaitu $x^2 + 13x + 40$ menjadi perkalian faktor-faktornya di ruas kiri.

Dengan kalimat dan kata-katamu sendiri, tuliskan secara jelas cara pemfaktoran dari bentuk $x^2 + px + q$ dengan membalik tahapan perkalian di atas. Bandingkan cara kalian dengan teman-teman yang lain dan bandingkan pula dengan cara pada uraian berikut.

Misalkan $a, b \in R$ dengan $p = a + b$ dan $q = a \times b$ maka

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + (a + b)\, x + a \times b \\ &= x^2 + ax + bx + ab \\ &= x\,(x + a) + b\,(x + a) \\ &= (x + a)\,(x + b) \end{aligned}$$

Dari uraian di atas, diperoleh rumus pemfaktoran bentuk $x^2 + px + q$ sebagai berikut.

> $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$ dengan syarat $p = a + b$ dan $q = ab$

Ini berarti untuk memfaktorkan bentuk $x^2 + px + q$ dapat dilakukan dengan mencari dua bilangan yang merupakan faktor-faktor dari q, tetapi jumlah dari kedua bilangan tersebut harus sama dengan p.

Faktor

Suatu bilangan yang membagi habis bilangan lain maka bilangan yang membagi adalah *faktor* dari bilangan yang dibagi.
Contoh:
6 : 2 = 3 dan 6 : 3 = 2
maka 3 dan 2 adalah faktor dari 6

Contoh SOAL

Faktorkanlah.

a. $x^2 + 6x + 8$ b. $x^2 - x - 2$

Penyelesaian:

a. $\left.\begin{aligned} a + b &= 6 \\ a \cdot b &= 8 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 4 \end{aligned}$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= (x + a)\,(x + b) \\ &= (x + 2)\,(x + 4) \end{aligned}$$

atau dapat diselesaikan dengan cara

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= x^2 + (2x + 4x) + 8 \\ &= (x^2 + 2x) + (4x + 8) \\ &= x(x + 2) + 4(x + 2) \\ &= (x + 4)\,(x + 2) \end{aligned}$$

b. $\left.\begin{aligned} a + b &= -1 \\ a \cdot b &= -2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -2 \end{aligned}$

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)\,(x - 2)$$

atau dapat diselesaikan dengan cara

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= x^2 + (x - 2x) - 2 \\ &= (x^2 + x) - (2x + 2) \\ &= x(x + 1) - 2(x + 1) \\ &= (x - 2)(x + 1) \end{aligned}$$

5 Pemfaktoran Bentuk $px^2 + qx + r$

Untuk mengetahui cara pemfaktoran bentuk $px^2 + qx + r$, coba kalian amati perkalian berikut.

$$\begin{aligned} (4x + 3)(2x + 4) &= 4x(2x + 4) + 3(2x + 4) \\ &= 8x^2 + 16x + 6x + 12 \end{aligned}$$

$= 8x^2 + 22x + 12$

8 × 12

16 + 6

16 × 6 = 8 × 12

Coba kalian amati proses pemfaktoran dari salah satu contoh bentuk $px^2 + qx + r$, yaitu $8x^2 + 22x + 12$ menjadi perkalian faktor-faktornya di ruas kiri.

Dengan kalimat dan kata-katamu sendiri, tuliskan secara jelas pemfaktoran bentuk $px^2 + qx + r$ dengan membalik tahapan perkalian di atas. Bandingkan cara kalian dengan teman-teman yang lain dan bandingkan pula dengan cara pada uraian berikut.

Misalkan $a, b, c, d \in R$ dan berlaku hubungan $p = ac$, $q = ad + bc$ dan $r = bd$ maka

$$\begin{aligned} px^2 + qx + r &= acx^2 + (ad + bc)x + bd \\ &= acx^2 + adx + bcx + bd \\ &= ax(cx + d) + b(cx + d) \\ &= (ax + b)(cx + d) \end{aligned}$$

Dari uraian di atas diperoleh rumus pemfaktoran bentuk $px^2 + qx + r$ sebagai berikut.

> $px^2 + qx + r = (ax + b)(cx + d)$ dengan syarat $p = ac$, $q = ad + bc$ dan $r = bd$

Bila $pr = ac(bd) = ad(bc)$, di sini terlihat bahwa ad dan bc merupakan faktor-faktor dari pr dan jika ad dan bc dijumlahkan akan menghasilkan q (koefisien x).

Ini berarti untuk memfaktorkan bentuk $px^2 + qx + r$ dapat dilakukan dengan cara mencari dua bilangan yang merupakan faktor-faktor dari pr, tetapi jumlah dari kedua bilangan tersebut harus sama dengan q.

Contoh SOAL

Faktorkanlah.

a. $6x^2 - 13x + 6$

b. $2x^2 + 7x + 5$

Penyelesaian:

a. Berdasarkan konsep di atas, jika $(ax + b)$ dan $(cx + d)$ adalah faktor dari $6x^2 - 13x + 6$, maka harus berlaku bahwa $ad \cdot bc = p \cdot r = (6) \cdot (6) = 36$ dan $ad + bc = q = -13$. Selanjutnya kita harus menentukan nilai-nilai dari ad dan bc yang merupakan faktor dari pr dan jumlahnya sama dengan q, yaitu:

$ad = (3)(-3) = -9$

$bc = (-2)(2) = -4$

$ad \cdot bc = 36$ dan

$ad + bc = -9 + (-4) = -13$

Dari uraian di atas, diperoleh nilai-nilai yang memenuhi $a = 3$, $b = -2$, $c = 2$, dan $d = -3$.

Jadi, $6x^2 - 3x + 6 = (ax + b)(cx + d) = (3x - 2)(2x - 3)$.

b. $2x^2 + 7x + 5$

Dua bilangan yang merupakan faktor $pr = (2)(5) = 10$ dan jumlahnya sama dengan $q = 7$, yaitu:

$ad = (2)(1) = 2$

$bc = (5)(1) = 5$

$ad \,.\, bc = 10$ dan

$ad + bc = 2 + 5 = 7$

maka nilai-nilai yang memenuhi

$a = 2$, $b = 5$, $c = 1$, dan $d = 1$

Jadi, $2x^2 + 7x + 5 = (2x + 5)(x + 1)$.

LATIHAN 6

Faktorkanlah.

a. $x^2 + 7x + 10$
b. $c^2 - c - 30$
c. $a^2 + ab - 2b^2$
d. $x^2 - 3xy - 18y^2$
e. $a^2 - 32ab + 60b^2$
f. $a^2 - 11ab - 60b^2$
g. $3x^2 + 8x + 4$
h. $15x^2 - 44x - 3$
i. $12a^2 + 8a - 15$
j. $12a^2 - 7ab - 12b^2$
k. $6x^2 + 7x + 2$
l. $4y^2 - 23y + 15$

6 Penyederhanaan Pembagian Suku

Bentuk aljabar $\frac{2a}{a}$ dapat disederhanakan menjadi 2, demikian juga dengan bentuk $\frac{3(a+2)}{(a+2)}$ dapat disederhanakan menjadi 3. Bentuk $\frac{2a}{a}$ dan $\frac{3(a+2)}{(a+2)}$ dapat disederhanakan karena mempunyai faktor-faktor yang sama. Sering kali bentuk-bentuk aljabar tersebut tidak mempunyai faktor yang sama, sehingga tidak dapat disederhanakan atau dibagi. Biasanya bentuk-bentuk yang tidak dapat dibagi atau disederhanakan tersebut harus difaktorkan terlebih dahulu.

Contoh SOAL

Sederhanakanlah

a. $\frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

b. $\frac{x^4 - 9}{x^2 - 3}$

Penyelesaian:

a. $\frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = \frac{(x-4)(x+3)}{x-4} = x + 3$

b. $\frac{x^4 - 9}{x^2 - 3} = \frac{(x^2-3)(x^2+3)}{x^2-3} = x^2 + 3$

LATIHAN 7

1. Sederhanakanlah.

a. $\frac{2a}{a}$
b. $\frac{72abc}{3ab}$
c. $\frac{4(x-3)}{x-3}$
d. $\frac{5ax - bx}{2x}$
e. $\frac{3b(e+f)}{d(e+f)}$
f. $\frac{5(a-b)}{10(ac-bc)}$

2. Sederhanakanlah.

a. $\frac{4a + 4b}{2a + 2b}$
b. $\frac{3a + 3b + 3c}{a + b + c}$
c. $\frac{2a + 2b + da + db}{4(a+b)}$
d. $\frac{3a - 3b + ca - cb}{3ac - 3bc}$
e. $\frac{6a + 12ab + d + 2db}{3a + 6ab}$
f. $\frac{4a - 4b - (cb - ac)}{2ac - 2bc}$

3. Tentukan bentuk paling sederhana dari bentuk aljabar berikut.

a. $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}$

c. $\dfrac{6x^2 - x - 1}{9x^2 - 1}$

d. $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

e. $\dfrac{4x^2 + 12x + 9}{2x^2 + x - 3}$

f. $\dfrac{6x^2 - x - 2}{8x^2 - 2x - 3}$

7 Pemangkatan Konstanta dan Suku

Bentuk pemangkatan konstanta dasarnya adalah pemangkatan bilangan atau angka, misalnya 19^2, 21^2, $101^2 - 99^2$ dan lainnya. Untuk bentuk-bentuk tertentu pada pemangkatan konstanta dapat digunakan kaidah atau aturan dari pemangkatan suku dan juga pemfaktoran, yaitu sebagai berikut.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(a + b)(a + b) = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 + b^2 - 2ab$$

Misalnya:

a. $101^2 - 99^2 = (101 + 99)(101 - 99)$
$= 200 \times 2 = 400$

b. $21^2 = (20 + 1)^2 = 20^2 + 1^2 + 2 \times 20 \times 1$
$= 400 + 1 + 40 = 441$

c. $19^2 = (20 - 1)^2 = 20^2 + 1^2 - 2 \times 20 \times 1$
$= 400 + 1 - 40 = 361$

LATIHAN 8

1. Dengan menggunakan bentuk $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, hitunglah:

   a. $201^2 - 194^2$ c. $63^2 - 37^2$

   b. $402^2 - 398^2$ d. $82^2 - 18^2$

2. Dengan menggunakan bentuk $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, hitunglah:

   a. 31^2 c. 42^2

   b. 53^3 d. 81^2

3. Dengan menggunakan bentuk $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, hitunglah:

   a. 19^2 c. 38^2

   b. 18^2 d. 48^2

C Operasi Pecahan Bentuk Aljabar

Pada subbab sebelumnya telah dipelajari operasi bentuk aljabar. Pada pembahasan kali ini akan dipelajari operasi pecahan bentuk aljabar. Pada prinsipnya operasi pecahan bentuk aljabar sama seperti operasi pecahan biasa. Untuk mengetahui lebih jelas operasi pecahan bentuk aljabar, perhatikan penjelasan berikut.

1 Penjumlahan dan Pengurangan Pecahan Bentuk Aljabar

Prinsip suatu penjumlahan dan pengurangan pecahan bentuk aljabar sama dengan penjumlahan dan pengurangan pecahan pada bilangan bulat, yaitu dengan menyamakan penyebut dari masing-masing pecahan tersebut. Untuk $a, b, c, d \in R$ maka secara umum bentuk penjumlahan atau pengurangan pecahan bentuk aljabar dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, c \neq 0 \text{ dan } \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}, c \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, c \neq 0 \text{ dan } \frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd}, c \neq 0, d \neq 0$$

Apa syarat dua pecahan bentuk aljabar dapat dijumlahkan dan dikurangkan?

Contoh SOAL

Selesaikanlah.

a. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

b. $\frac{5}{(x+3)} + \frac{2}{(x-3)}$

Penyelesaian:

a. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{3x+2x}{6} = \frac{5x}{6}$

b. $\frac{5}{(x+3)} + \frac{2}{(x-3)} = \frac{5(x+3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)}$

$= \frac{5(x-3)+2(x+3)}{(x+3)(x-3)}$

$= \frac{5x-15+2x+6}{(x+3)(x-3)}$

$= \frac{7x-9}{(x+3)(x-3)}$

LATIHAN 9

1. Sederhanakanlah.

a. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$

b. $\frac{2x}{3} + \frac{4x}{3} + \frac{5x}{3}$

c. $\frac{2x+1}{4} + \frac{3x+1}{5} + \frac{2x}{3}$

d. $\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+b}$

e. $\frac{a-2b}{5b} - \frac{2a-b}{5b} + \frac{2+5b}{5b}$

2. Sederhanakanlah.

a. $\frac{3}{x-y} + \frac{2}{x+y}$

b. $\frac{1}{a^2 - ab} - \frac{1}{a^2 - b^2}$

c. $\frac{1}{x^2 - 9} + \frac{1}{(x-3)^2}$

d. $\frac{3}{x^2 - 4} - \frac{2}{x^2 - 3x + 2}$

e. $\frac{6}{x^2 - 2x - 8} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$

f. $\frac{1}{a^2 - 5a + 4} - \frac{1}{a^2 - 3a + 2}$

2 Perkalian dan Pembagian Pecahan Bentuk Aljabar

a. Perkalian Pecahan

Hasil kali pecahan bentuk aljabar akan menghasilkan sebuah pecahan yang *pembilang* dan *penyebutnya* dikalikan dengan *pecahan* yang diberikan. Secara umum dapat dituliskan sebagai berikut.

Untuk $a, b, p, q \in R$ berlaku $\frac{a}{p} \times \frac{b}{q} = \frac{ab}{pq}$; $p, q \neq 0$

Contoh SOAL

Selesaikanlah:

a. $\frac{2}{3a} \times \frac{4}{7a}$

b. $\frac{x^2 - 1}{6y^2} \times \frac{3y}{x+1}$

Penyelesaian:

a. $\frac{2}{3a} \times \frac{4}{7a} = \frac{8}{21a^2}$

b. $\frac{x^2 - 1}{6y^2} \times \frac{3y}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{6y^2} \times \frac{3y}{(x+1)}$

$= \frac{(x-1)}{2y}$

b. Pembagian Pecahan

Membagi suatu bilangan dengan pecahan akan memberikan hasil yang sama jika bilangan itu dikalikan dengan kebalikan dari pecahan. Hasil bagi pecahan bentuk aljabar akan menghasilkan sebuah *pecahan yang dibagi* dikalikan dengan kebalikan dari *pecahan pembagi* yang diberikan. Secara umum dapat ditulis sebagai berikut.

Untuk $a, b, p,$ dan $q \in R$ berlaku:

$\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{a}{p} \times \frac{q}{b} = \frac{aq}{pb}$; $p, b \neq 0$

dengan $\frac{a}{p}$ pecahan yang dibagi dan $\frac{b}{q}$ pecahan pembagi.

Cobalah kalian buktikan dan selidiki bahwa membagi suatu bilangan dengan pecahan hasilnya akan sama dengan mengalikan bilangan itu dengan kebalikan dari bilangan pecahannya.

Contoh SOAL

Selesaikanlah pembagian pecahan berikut.

a. $\frac{4(a+b)}{3c} : \frac{2(a+b)}{3d}$ b. $\frac{b^2}{c+2} : \frac{3b}{c^2-4}$

Penyelesaian:

a. $\frac{4(a+b)}{3c} : \frac{2(a+b)}{3d} = \frac{4(a+b)}{3c} \times \frac{3d}{2(a+b)} = \frac{2d}{c}$

b. $\frac{b^2}{c+2} : \frac{3b}{c^2-4} = \frac{b^2}{c+2} \times \frac{c^2-4}{3b} = \frac{b^2}{(c+2)} \times \frac{(c+2)(c-2)}{3b} = \frac{b(c-2)}{3}$

LATIHAN 10

1. Selesaikanlah bentuk berikut ini.
   a. $\frac{(r+s)}{2} \times \frac{4}{s(r+s)}$
   b. $\frac{u(u+r)}{4r} : \frac{2(u+r)}{r^2}$
   c. $\frac{11x}{4y} : \frac{33x}{6y^2}$
   d. $\frac{r^2s}{t^3} : \frac{2r^2s - rs}{2rt^2 - t^2}$
   e. $\frac{x+y}{x-y} \times \frac{2x-2y}{5x+5y}$
   f. $\frac{-a+b}{a-c} \times \frac{c-d}{a+b}$
   g. $\frac{ab}{3c} : \frac{a^2b}{6c^2}$

2. Sederhanakanlah.
   a. $\frac{3x^2yz}{6xyz^2}$
   b. $\frac{9(x-1)}{18(y-1)}$
   c. $\frac{(2+d)(2-d)}{2d(2-d)}$
   d. $\frac{4(2x-2)}{x-1}$
   e. $\frac{x^2-xy}{x^2-xz}$
   f. $\frac{2x^3y - 6x^2y^2}{3x^2y^2 - 9xy^3}$

3 Pemangkatan pada Pecahan Bentuk Aljabar

Pemangkatan merupakan salah satu operasi hitung pada bilangan. Operasi pangkat dapat digunakan pada bentuk aljabar, demikian juga pada pecahan bentuk aljabar, seperti yang dapat kalian pahami pada contoh berikut.

Contoh SOAL

Selesaikanlah.

a. $\left(\frac{a}{c}\right)^2$ c. $\left(\frac{d}{a+c}\right)^2$

b. $\left(\frac{ab}{c}\right)^2$ d. $\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2$

Penyelesaian:

a. $\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2}$ c. $\left(\frac{d}{a+c}\right)^2 = \frac{d^2}{(a+c)^2}$

b. $\left(\frac{ab}{c}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}$ d. $\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2 = \frac{(a-c)^2}{(a+c)^2}$

LATIHAN 11

1. Jabarkanlah
   a. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$
   b. $\left(\frac{a-2}{a+3}\right)^2$
   c. $\left(\frac{a+1}{b}\right)^2$
   d. $\left(\frac{a-1}{a}\right)^2$
   e. $\left(\frac{a+4ac}{ab}\right)^2$
   f. $\left(\frac{ac+bc}{abc}\right)^2$
   g. $\left(\frac{a+4ac}{ab}\right)^2$
   h. $\left(\frac{ac+bc}{abc}\right)^2$

2. Selesaikanlah perpangkatan pada pecahan aljabar berikut.
   a. $\left(\frac{2a}{-3b}\right)^2$
   b. $\left(\frac{4-2a}{2-3a}\right)^2$
   c. $\left(\frac{6a-3b}{12ax-6bx}\right)^2$
   d. $\left(\frac{4a+3}{1-2a}\right)^2$
   e. $\left(\frac{a^2-2}{10-5a}\right)^2$
   f. $\left(\frac{x^2+x-6}{x^2+5x+6}\right)^2$
   g. $\left(\frac{x^2+x-6}{x^2+5x+6}\right)^2$
   h. $\left(\frac{5-a}{2a-10}\right)^2$

4 Gabungan Operasi Hitung pada Pecahan Bentuk Aljabar

Gabungan operasi hitung pada pecahan bentuk aljabar adalah penggunaan operasi hitung tambah, kali, bagi dan pangkat secara bersamaan pada pecahan bentuk aljabar. Gabungan operasi hitung pada bentuk aljabar urutan pengerjaannya sesuai dengan pengerjaan pada operasi hitung bilangan bulat. Operasi hitung yang berada di dalam kurung dikerjakan terlebih dahulu kemudian operasi pangkat. Selanjutnya, perkalian atau pembagian dan terakhir operasi penjumlahan atau pengurangan. Agar kalian mengerti, coba amati contoh berikut.

Contoh SOAL

Sederhanakanlah.

a. $\left(\frac{16}{x} + \frac{4(x+1)}{y^2}\right) \times \frac{xy}{8}$

b. $\left(\frac{3}{x} : \frac{3y}{6x^2}\right) + \left(\frac{4x}{3y^2} \times \frac{5y}{12x^2}\right)$

Penyelesaian:

a. $\left(\frac{16}{x}+\frac{4(x+1)}{y^2}\right)\times\frac{xy}{8}=\left(\frac{16(y^2)}{xy^2}+\frac{4(x+1)(x)}{xy^2}\right)\times\frac{xy}{8}$

$$=\left(\frac{16y^2}{\cancel{xy^2}}+\frac{(4x^2+4x)}{\cancel{xy^2}}\right)\times\frac{\cancel{xy}}{8}$$

$$=\frac{\cancel{4}\cdot(4y^2+x^2+x)}{y}\times\frac{1}{\cancel{8}}=\frac{4y^2+x^2+x}{2y}$$

b. $\left(\frac{3}{x}:\frac{3y}{6x^2}\right)+\left(\frac{4x}{3y^2}\times\frac{5y}{12x^2}\right)=\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{x}}\times\frac{6x^{\cancel{2}}}{\cancel{3}y}\right)+\left(\frac{\cancel{4x}}{3y^{\cancel{2}}}\times\frac{5\cancel{y}}{\cancel{12}x^{\cancel{2}}}\right)$

$$=\frac{6x}{y}+\frac{5}{9xy}$$

$$=\frac{6x(9x)}{9xy}+\frac{5}{9xy}=\frac{54x^2+5}{9xy}$$

Kerjakan bersama kelompok belajarmu.

Carilah soal kontekstual yang berhubungan dengan gabungan operasi hitung pecahan bentuk aljabar dari sumber-sumber lain, seperti buku di perpustakaan maupun internet. Kerjakan soal tersebut dan laporkan hasilnya pada gurumu.

LATIHAN 12

Sederhanakanlah.

a. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}:\frac{x}{y}$

b. $\frac{3x}{2}\times\frac{2a}{3x}$

c. $\frac{6ab}{5bc}\times\frac{a}{-2c}:\frac{10a}{-3c}$

d. $\frac{5mn}{3}\times\frac{2}{n}:\frac{n^2-3}{6}$

e. $\frac{3y^2}{x^2}\times\frac{2x}{9y}+\frac{2x}{x-y}$

f. $\frac{5}{x^2-1}\times\frac{x+1}{2}$

g. $\frac{x^2-5xy+4y^2}{x^2+2xy-3y^2}:\frac{x^2-3xy-4y^2}{x^2+6xy+9y^2}$

h. $\frac{x^2-xy}{xy+y^2}:\frac{xy-y^2}{x^2+xy}$

i. $\frac{a^2-3a+2}{a^2-5a+6}\times\frac{a^2-7a+12}{a^2-5a+4}$

j. $\frac{ab+b^2}{2x-bc}\times\frac{2bx-b^2c}{(a+b)^2}$

5 Penyederhanaan Pecahan dalam Aljabar

Gambar 1.3 Buah jambu dan bagian-bagiannya.

Pecahan aljabar adalah pecahan dengan pembilang dan penyebutnya adalah suku-suku banyak.

Menyederhanakan suatu pecahan pada dasarnya adalah mengubah pecahan sedemikian sehingga pembilang dan penyebut tidak mempunyai faktor persekutuan terbesar (FPB). Jika P adalah pembilang dan Q adalah penyebut suku banyak maka pecahan dalam bentuk aljabar ditulis:

$$\frac{P}{Q}, \ Q \neq 0$$

Perhatikan pecahan bentuk aljabar di bawah ini.

a. $\dfrac{4x}{5y}$ b. $\dfrac{b^2 - 4b}{b^3 - 3b}$ c. $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 5x + 6}$

Sebuah pecahan rasional dapat disederhanakan dengan membagi pecahan tersebut dengan faktor persekutuan terbesar (FPB) dari pembilang dan penyebutnya. Misalkan $\frac{P}{Q}$ adalah pecahan rasional dengan $Q \neq 0$ dan R adalah faktor persekutuan terbesar dari P dan Q maka secara umum bentuk penyederhanaannya dapat ditulis:

$$\frac{P}{Q} = \frac{P : R}{Q : R}$$

Contoh SOAL

Sederhanakanlah.

a. $\dfrac{a^2 - 2a - 3}{a^2 - 9}$

b. $\dfrac{1 + \frac{1}{2 + a}}{a - \frac{9}{a}}$

Penyelesaian:

a. $\dfrac{a^2 - 2a - 3}{a^2 - 9} = \dfrac{(a - 3)(a + 1)}{(a - 3)(a + 3)}$

$= \dfrac{(a + 1)}{(a + 3)}$; $a \neq -3$

b. $\dfrac{1 + \frac{1}{2 + a}}{a - \frac{9}{a}} = \dfrac{\frac{1(2 + a) + 1}{2 + a}}{\frac{(a)(a) - 9}{a}}$

$= \dfrac{\frac{3 + a}{2 + a}}{\frac{a^2 - 9}{a}}$

$= \dfrac{3 + a}{2 + a} \times \dfrac{a}{a^2 - 9}$

$= \dfrac{(3 + a) \times a}{(2 + a)(a - 3)(a + 3)}$

$= \dfrac{a}{(2 + a)(a - 3)}$, $a \neq -2$, $a \neq 3$

LATIHAN 13

1. Sederhanakanlah.

   a. $\dfrac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 1}$

   b. $\dfrac{a^2 + 4a + 4}{a^2 - a - 6}$

   c. $\dfrac{64a^2 - 49b^2}{8a + 7b}$

   d. $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 10}$

   e. $\dfrac{p^2 - 8p - 9}{p^2 - 4p - 5}$

   f. $\dfrac{4m + 24}{m^2 + 2m + 72}$

2. Sederhanakanlah.

   a. $\dfrac{a + \dfrac{1}{a}}{a - \dfrac{1}{a}}$

   b. $\dfrac{1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}}{1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^2}}$

   c. $\dfrac{1 + \dfrac{a - b}{a + b}}{1 - \dfrac{a - b}{a + b}}$

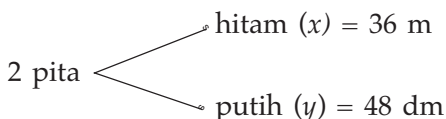
   d. $\dfrac{\dfrac{1 + a}{1 - a} - \dfrac{1 - a}{1 + a}}{\dfrac{1 - a}{1 + a} - \dfrac{1 + a}{1 - a}}$

D Aplikasi Faktorisasi Suku Aljabar dalam Kehidupan

Penerapan faktorisasi suku aljabar banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari dan juga pada bidang ilmu lain, seperti contoh berikut.

Joko dan Ucok mempunyai 2 pita, yaitu pita hitam dan pita putih dengan panjang masing-masing pita 36 m dan 48 dm. Kedua pita itu akan dipotong menjadi potongan-potongan yang sama panjang dan banyaknya potongan tiap pita harus sama. Jika kedua pita itu dipotong habis tanpa sisa, berapakah panjang potongan terpanjang yang dapat dihasilkan?

Gambar 1.4 Orang sedang memotong sebuah pita

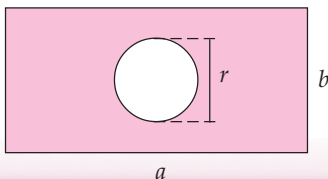
Penyelesaian:

Untuk mendapatkan potongan-potongan yang sama dari setiap pita tersebut tanpa ada pita yang tersisa, kalian harus menentukan panjang masing-masing pita yang akan dipotong. Untuk menjawabnya, kalian harus mencari FPB dari panjang kedua pita tersebut. FPB dari panjang kedua pita itu adalah 12.

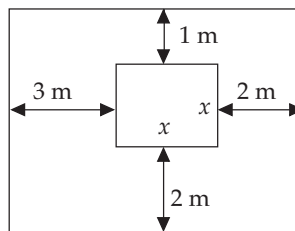
$$\frac{36x : 12}{48y : 12} = \frac{3x}{4y} = \frac{3 \text{ m}}{4 \text{ dm}}$$

Membagi panjang tiap pita dengan FPB dari panjang kedua pita itu.

Agar didapat potongan yang sama dan tidak ada sisa potongan maka tiap pita harus dipotong menjadi 12 potongan. Pita hitam dipotong setiap 3 m dan pita putih dipotong setiap 4 dm. Jadi, panjang potongan pita terpanjang yang dihasilkan adalah 3 meter.

Soal-Soal Kontekstual

1. Seorang ilmuwan kimia diberi tugas untuk memasukkan cairan alkohol dan asam cuka ke dalam tabung reaksi. Volume alkohol yang dimasukkan ke dalam tiap tabung harus sama dan tidak ada cairan yang tersisa begitu juga dengan asam cuka. Volume alkohol yang tersedia 60 cc dan asam cuka 40 liter.
   a. Berapa jumlah tabung yang dibutuhkan?
   b. Berapakah volume tiap cairan zat yang harus dimasukkan ke dalam tiap tabung agar volume alkohol dan asam cuka pada tiap tabung sama?
2. Perhatikan gambar berikut ini.

Gambar tersebut merupakan gambar sebuah taman yang panjangnya a dan lebarnya b. Di tengah taman terdapat kolam yang diameternya r. Nyatakan luas taman di luar kolam dalam a, b, dan r.

3. Pada sebuah taman terdapat kolam dengan ukuran seperti pada gambar di bawah ini. Nyatakanlah luas taman di luar kolam dalam x.

Tugas Siswa

Kerjakanlah tugas berikut secara berkelompok atau bersama teman sebangkumu.

Ambil seutas tali dengan panjang 29 meter, lalu potong menjadi 3 bagian yang tidak sama. Jika potongan pertama dibuang separuhnya, potongan kedua dibuang sepertiganya, dan potongan ketiga dibuang seperempatnya, sisa potongan itu menjadi sama panjang. Berapakah panjang potongan-potongan tali yang terbuang? Dapatkah kamu menjawab pertanyaan tersebut dengan menggunakan operasi bentuk aljabar? Diskusikanlah dengan teman-temanmu.

RANGKUMAN

1. Penjumlahan dan pengurangan suku-suku sejenis

$$ax - bx + cx = (a - b + c)x$$

2. Penggunaan sifat distributif

$$k(a \pm b) = ka \pm kb$$

3. Hasil kali suku dua
   a. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
   b. $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$
   c. $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$
4. Pemfaktoran
   a. $ax - bx = (a - b)x$
   b. $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$
   c. $x^2 + (b + c)x + bc = (x + b)(x + c)$
   d. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
   e. $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
5. Pecahan
   a. Penyederhanaan pecahan

   $$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}\ ;\ a, c \neq 0$$

   b. Operasi pecahan

   (1) Penjumlahan

   $$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c};\ c \neq 0$$

   $$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd};\ c, d \neq 0$$

   (2) Perkalian

   $$\frac{a}{p} \times \frac{b}{q} = \frac{ab}{pq};\ p, q \neq 0$$

   (3) Pembagian

   $$\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = \frac{a}{p} \times \frac{q}{b} = \frac{aq}{pb};\ p, b \neq 0$$

   (4) Perpangkatan

   $$\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} \text{ dan } \left(\frac{ab}{c}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}\ ;\ c \neq 0$$

Uji Kompetensi Bab 1

A Pilihan ganda

Berilah tanda silang (×) pada huruf a, b, c, atau d pada jawaban yang benar.

1. Koefisien x dari $4x^2 + 3x + 5y^2$ adalah ....
   a. 3 c. 5
   b. 4 d. 6
2. Jumlah dari $3a - 2b + 5c$ dengan $4a - 5b + 7c$ adalah .....
   a. $7a - 3b + 12c$ c. $7a - 2b + 12c$
   b. $7a - 7b + 12c$ d. $7a - 7b - 12c$
3. Hasil pengurangan $2a + 3b - c$ dari $3a - 2b + c$ adalah .....
   a. $-a + 5b - 2c$ c. $a - 5b + 2c$
   b. $-a - 5b + 2c$ d. $a - b - 2c$
4. Hasil dari $-4(3a - 2b + 3c)$ adalah .....
   a. $-12a - 8b + 12c$
   b. $-12a + 8b + 12c$
   c. $12a - 8b - 12c$
   d. $-12a + 8b - 12c$
5. Hasil dari $(x + 2)(x - 3)$ adalah .....
   a. $x^2 - x + 6$ c. $x^2 + x + 6$
   b. $x^2 - x - 6$ d. $x^2 + x - 6$
6. Hasil dari $(2 - x)(3 - x)$ adalah .....
   a. $x^2 - 5x + 6$ c. $-x^2 - 5x - 6$
   b. $x^2 + 5x - 6$ d. $x^2 + 5x - 6$
7. Hasil dari $(x + 3by)^2$ adalah ....
   a. $x^2 + 3byx - 9b^2y^2$
   b. $x^2 - 3byx - 9b^2y^2$
   c. $x^2 + 6byx + 9b^2y^2$
   d. $x^2 - 6byx + 9b^2y^2$
8. Hasil dari $(2ax + 3by)^2$ adalah ....
   a. $4a^2x^2 + 12abyx + 9b^2y^2$
   b. $x^2 + 3byx - 9b^2y^2$
   c. $2a^2x^2 - 6abyx + 9b^2y^2$
   d. $4a^2x^2 - 12abyx + 3b^2y^2$
9. Hasil dari $(x - 2)(x + 2)$ adalah .....
   a. $x^2 - 4x + 4$ c. $x^2 - 4$
   b. $x^2 + 4x + 4$ d. $x^2 + 4$
10. Hasil dari $(2x - 5y)(-2x - 5y)$ adalah ....
    a. $4x^2 - 10xy + 25y^2$
    b. $4x^2 - 25y^2$
    c. $25y^2 - 4x^2$
    d. $4x^2 + 10xy + 25y^2$
11. Pemfaktoran dari $x^3 - x^2 + x - 1$ adalah ....
    a. $(x^2 - 1)(x - 1)$ c. $(x^2 + 1)(x - 1)$
    b. $(x^2 - 1)(x + 1)$ d. $(x^2 + 1)(x + 1)$
12. Faktorisasi dari $9x^2 - 16$ adalah .....
    a. $(9x - 16)(x - 1)$ c. $(9x - 4)(4x + 4)$
    b. $(3x + 4)(3x - 4)$ d. $(3x - 4)(3x - 9)$
13. Hasil dari $982^2 - 18^2$ adalah .....
    a. 96.400 c. 964.000
    b. 98.400 d. 984.000
14. Bentuk faktor dari $2a^2 + 4a + 2$ adalah.....
    a. $2(a + 1)^2$ c. $(2a + 1)(2a + 2)$
    b. $2(a + 1)(a + 2)$ d. $(a + 1)(2a + 1)$
15. Bentuk faktor dari $12x^2 - 43x + 35$ ....
    a. $(2x - 7)(6x - 5)$ c. $(3x - 5)(4x - 7)$
    b. $(4x - 5)(3x - 7)$ d. $(6x - 7)(2x - 5)$
16. Bentuk sederhana dari $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$ adalah ....
    a. $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$ c. $\dfrac{x - y}{x - y}$
    b. $\dfrac{x - y}{x + y}$ d. $\dfrac{1}{2xy}$
17. Bentuk sederhana dari $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{3}{a^3}$ adalah ....
    a. $\dfrac{(a - 3)(a - 1)}{a^3}$ c. $\dfrac{(a - 3)(a + 1)}{a^3}$
    b. $\dfrac{(a + 3)(a - 1)}{a^3}$ d. $\dfrac{a^2 + 2a + 3}{a^3}$

18. Bentuk $(2a - 3b + c)^2$ = ...
a. $4a^2 + 9b^2 + c^2 - 12ab + 4ac - 6bc$
b. $4a^2 + 9b^2 + c^2 + 12ab - 4ac + 6bc$
c. $4a^2 + 9b^2 + c^2 - 12ab - 4ac + 6bc$
d. $4a^2 + 9b^2 + c^2 - 12ab + 4ac + 6bc$

19. Bentuk sederhana dari :
$$\frac{(6x^2 + 7x - 3)}{2x^2 + x - 3} \times \frac{(x^2 - 5x - 14)}{3x^2 + 5x - 2}$$
a. $\frac{x - 7}{x - 1}$ c. $\frac{x + 7}{x + 1}$
b. $\frac{x + 7}{x - 1}$ d. $\frac{x - 1}{x - 7}$

20. Bila $a = \frac{1 + x}{2 - x}$ maka $\frac{1}{a + 1} + \frac{2a + 1}{a^2 - 1}$ = ...
a. $\frac{(1 + x)(2 + x)}{2x - 1}$ c. $\frac{(1 + x)(2 - x)}{2x - 1}$
b. $\frac{(1 - x)(2 - x)}{x - 2}$ d. $\frac{(1 - x)(2 - x)}{2x + 1}$

B Esai

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini.

1. Sederhanakanlah.
a. $(3x^3 + 5x^2 - 2x - 1) - (x^3 - 2x^2 + x + 3)$
b. $(7x^2 + 6) - (x^2 - 10x + 3)$
2. Sederhanakanlah.
a. $9(11 - 2y) - 6(11 - 2y)$
b. $3\ [b + 5\ (b - a)]$
c. $-2(1 - 20a) + 2(1 - 10a)$
3. Jabarkanlah.
a. $(7a + 4)(7a - 4)$
b. $2a(a - 7) - (a + 1)(a - 7)$
c. $(a + b)^2 - (b + c)^2$
d. $[(u - 3) + v][(u - 3) - v]$
4. Nyatakan menjadi bentuk paling sederhana.
a. $\frac{120a^5b^3}{13a^3b}$ c. $\frac{14r^4s^2}{-98rs}$
b. $\frac{2(y^3z)^2}{28(yz^2)^2}$ d. $\frac{6u^2v}{27u^2v^3}$
5. Faktorkanlah.
a. $ax + ay - bx - by$ d. $6 - x - 6x^2 + x^3$
b. $ax + a - x - 1$ e. $2x^2 - 2ax - bx + ab$
c. $a^2 - ax + 2ca - 2cx$
6. Faktorkanlah.
a. $x^2 - 12xy - 45y^2$
b. $x^2 - 2xy + y^2 = 5x - 5y + 6$
c. $a^2b^2 - 5abc - 84c^2$
d. $a^2 - 23a + 60$
7. Faktorkanlah.
a. $4x^2 + 23x + 15$ c. $4a^2b^2 - 16ab + 7$
b. $12x^2 - 26xy + 10y^2$ d. $100x^2 - 196y^4$
8. Sederhanakanlah
a. $\frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 + 5x - 3}$
b. $\frac{a^2 + 2a - 35}{a^2 - 14a + 49}$
c. $\frac{6c^2 - 13c + 6}{3c^2 + 10c - 8}$
d. $\frac{2a}{2a + 3b} + \frac{3b}{2a - 3b} - \frac{8b^2}{4a^2 - 9b^2}$
e. $\frac{3}{x - 2} + \frac{2}{3x + 6} - \frac{5x}{x^2 - 4}$
9. Sederhanakanlah.
a. $\frac{2t^2 - t - 15}{t + 2} \times \frac{t^2 - t - 6}{t^2 - 6t + 9}$
b. $\frac{y^2 - 16}{2y^3} \times \frac{4y}{y^2 - 6y + 8}$
10. Nyatakan menjadi bentuk paling sederhana.
a. $\dfrac{\frac{1}{y^2 + y} - \frac{1}{xy + x}}{\frac{1}{xy + x} - \frac{1}{y^2 + y}}$
b. $\dfrac{\frac{4}{x^2 - 9} + \frac{2}{x - 3}}{\frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 3}}$

BAB 2

Relasi dan Fungsi

Sumber: www.i194.photobucket.com

Tujuan Pembelajaran

- Memahami pengertian relasi
- Menyatakan relasi suatu himpunan dalam bentuk diagram panah, diagram Cartesius, dan pasangan berurutan
- Memahami pengertian fungsi, daerah asal, daerah lawan, dan daerah kawan
- Menyatakan fungsi dalam diagram panah, diagram Cartesius, dan pasangan berurutan
- Memahami pemetaan dan korespondensi satu-satu serta menghitung banyaknya pemetaan atau korespondensi satu-satu dari suatu fungsi
- Menghitung nilai fungsi, menggambar bentuk grafik suatu fungsi, dan menerapkannya untuk menyelesaikan masalah.

Pada suatu ujian, seorang siswa dapat menyelesaikan 30 soal dalam waktu 90 menit. Dapatkah kamu menentukan waktu yang diperlukan siswa untuk menyelesaikan 1 soal? 10 soal? 20 soal? Bagaimanakah caranya?

Untuk menyelesaikan persoalan tersebut kamu menggunakan aturan fungsi. Ini merupakan salah satu contoh penggunaan dari fungsi. Masih banyak contoh lain dari penggunaan aturan fungsi. Pelajarilah bab ini dengan saksama sehingga kamu dapat menyebutkan contoh-contoh lain dari penerapan aturan fungsi.

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Selesaikanlah perkalian di bawah ini.
   a. $4(x + y)$
   b. $-3(2x - 3y)$
   c. $-2x(3x - 2)$
   d. $4x(2x^2 - 5x + 1)$
2. Carilah hasil dari:
   a. $(x + 2)(x - 3)$
   b. $(2 - x)(3 - x)$
   c. $(2x + 1)(3x - 2)$
3. Faktorkanlah.
   a. $x^2 + 6x + 9$
   b. $4x^2 - 4x + 1$
   c. $x^2 + 2x + 1$
4. Sederhanakanlah.
   a. $\dfrac{a^2 - 2a - 3}{a^2 - 9}$
   b. $\dfrac{12a + 10}{6a^2 - 13a - 15}$

A Relasi

Pada bab sebelumnya kalian telah belajar mengenai operasi bentuk aljabar. Kalian harus sudah memahami materi tersebut sebelum mempelajari materi pada bab ini. Kalian akan menerapkan operasi bentuk aljabar pada bab ini.

Untuk memahami konsep tentang fungsi, terlebih dahulu kalian harus mengetahui apa yang dimaksud dengan *relasi*, sebab fungsi merupakan bagian khusus dari suatu relasi dan tidak semua relasi merupakan sebuah fungsi.

1 Pengertian Relasi

Tiga orang anak, yaitu Anto, Budi, dan Ade masing-masing menyukai buah-buahan. Anto suka durian dan jeruk, Budi suka melon, dan Ade suka jeruk dan mangga. Keterangan di atas dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan, yaitu himpunan anak-anak dan himpunan buah-buahan. Misalkan himpunan anak-anak adalah A = (Anto, Budi, Ade) dan himpunan buah-buahan adalah B = (durian, melon, jeruk, mangga). *Menurut kalian hubungan/relasi apakah yang mungkin terjadi antara kedua himpunan di dalam cerita di atas? Bandingkan jawabanmu dengan penjelasan berikut.*

Gambar 2.1 Relasi himpunan A dan B

Himpunan A dan B dapat dihubungkan atau mempunyai relasi *"menyukai"*. Kalian dapat menggambarkan relasi (hubungan) antara himpunan A dan B seperti Gambar 2.1. Dua himpunan berbeda mempunyai hubungan atau relasi yang diperlihatkan oleh masing-masing anggota kedua himpunan.

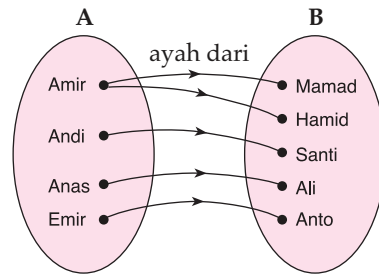
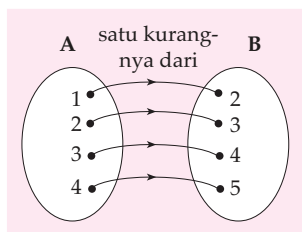
Setelah kalian memahami penjelasan di atas, *tuliskan dengan kata-katamu sendiri pengertian relasi dan bandingkan dengan pernyataan berikut ini.*

> Suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B terjadi jika ada anggota himpunan A dan B yang berpasangan (saling berelasi).

Contoh SOAL

Diketahui ada empat orang ayah, yaitu Amir, Andi, Anas, dan Emir. Amir mempunyai anak bernama Mamad dan Hamid. Andi mempunyai anak bernama Santi. Anas mempunyai anak namanya Ali dan Emir mempunyai anak bernama Anto. Tentukanlah relasi yang mungkin.

Penyelesaian:

Misalkan A adalah himpunan ayah, maka A = (Amir, Andi, Anas, Emir) dan B adalah himpunan anak maka B = (Mamad, Hamid, Santi, Ali, Anto). Kedua himpunan itu mempunyai hubungan *"ayah dari"* atau dapat dikatakan bahwa himpunan A dan himpunan B dihubungkan dengan relasi *"ayah dari"*.

2 Menyatakan Relasi dari Himpunan A ke Himpunan B

Untuk menyatakan relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu diagram panah, diagram Cartesius, dan pasangan berurutan.

a. Diagram Panah

Cara menyatakan relasi yang paling sederhana adalah dengan diagram panah. Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan. Untuk menyatakan relasi himpunan A dan B digunakan tanda panah ($\rightarrow$).

Gambar 2.2 Relasi "satu kurangnya dari"

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Jika himpunan A dan B dihubungkan dengan relasi *"satu kurangnya dari"*, diagram panah yang menunjukkan hubungan kedua himpunan tersebut ditunjukkan pada Gambar 2.2.

Relasi *"satu kurangnya dari"* pada contoh di atas artinya untuk setiap anggota A satu kurangnya dari pasangannya di anggota B.

Contoh SOAL

Diketahui $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ dan B {13, 17, 30, 31, 77} dihubungkan dengan relasi *"faktor prima dari"*. Tentukan diagram dari relasi kedua himpunan.

Penyelesaian:

Anggota-anggota himpunan A yang menjadi pasangan/*faktor prima* dari anggota-anggota himpunan B adalah sebagai berikut.

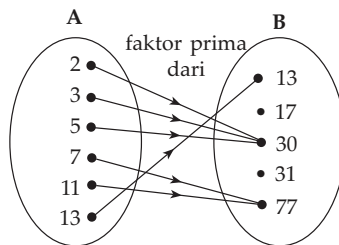
$2, 3, 5 \xrightarrow{\text{faktor prima dari}} 30$

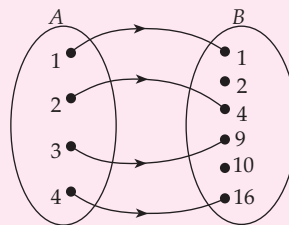
$7, 11 \xrightarrow{\text{faktor prima dari}} 77$

$13 \xrightarrow{\text{faktor prima dari}} 13$

$17 \xrightarrow{\text{faktor prima dari}}$ tidak ada

$31 \xrightarrow{\text{faktor prima dari}}$ tidak ada

Setelah kita mengetahui hasil himpunan faktor prima dari himpunan B maka kita dapat menuliskan diagram panah dari relasi kedua himpunan itu sebagai berikut.

LATIHAN 1

1. Diketahui $A = \{4, 9, 16, 25, 36\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Jika A dihubungkan ke B dengan relasi "kuadrat dari", tentukan diagram panah dari relasi himpunan A dan B.
2 Tiga orang siswa, yaitu Inda, Tono, dan Andri masing-masing menyukai olahraga. Inda menyukai renang, voli dan sepak bola; Tono menyukai voli dan tinju; sedangkan Andri menyukai basket dan pencak silat.
   a. Buatlah diagram panahnya.
   b. Jenis olahraga mana yang paling disukai siswa.
3. Pada akhir ulangan umum, diperoleh nilai rata-rata siswa dari 5 mata pelajaran, yaitu matematika, IPA, IPS, olahraga, dan sejarah dengan nilai rata-rata 8, 7, 6, 7, dan 9. Jika A adalah himpunan mata pelajaran dan B adalah himpunan nilai rata-rata, tentukanlah:
   a. diagram panahnya.
   b. dua mata pelajaran yang mempunyai nilai sama.
4. Pada gambar berikut himpunan A berelasi dengan himpunan B. Tentukan relasi yang mungkin dari:
   a. A ke B
   b. B ke A

b. Diagram Cartesius

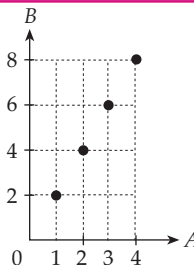
Cara menyatakan relasi yang kedua adalah dengan diagram Cartesius. Diagram Cartesius telah dipelajari di kelas VII. Pada diagram Cartesius kita mengenal sumbu-X dan sumbu-Y. Di sini sumbu-X dan sumbu-Y tidak dinyatakan atau ditulis, tetapi digantikan dengan nama himpunan-himpunan yang berelasi.

Jika suatu fungsi memetakan anggota himpunan A ke B maka dalam diagram Cartesius *sumbu-X* menunjukkan *anggota domain A* dan *sumbu-Y* menunjukkan *bayangan dari A* yang dipetakan oleh fungsi.

Contoh SOAL

Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dihubungkan dengan relasi *"setengah dari"*. Tentukanlah diagram Cartesius.

Penyelesaian:

Kita buat diagram Cartesius seperti di kelas VII, yaitu dua garis vertikal dan horizontal yang berpotongan tegak lurus. Sumbu mendatar adalah A dan sumbu tegaknya B. Relasi A ke B adalah *"setengah dari"*. Relasi dari himpunan A ke B dinyatakan dengan sebuah noktah (•) pada diagram Cartesius.

Math Quiz

Menurut kalian adakah contoh relasi yang memiliki dua atau lebih pasangan berurutannya sama? Apa yang kalian dapat simpulkan, jika ada relasi yang semua pasangan berurutannya sama?

c. Pasangan Berurutan

Cara menyatakan relasi berikutnya adalah dengan cara pasangan berurutan, yaitu suatu pasangan berurutan dari dua buah elemen. Misalkan $x \in A$ dan $y \in B$ maka pasangan berurutan dari hubungan himpunan A ke himpunan B dengan relasi R ditulis (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$.

Dua pasangan berurutan (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah sama jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$.

Contoh SOAL

1. Misal $A = \{5, 6, 7, 8\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Jika relasi dari A ke B adalah *"empat lebihnya dari"*, tentukan pasangan berurutan dari hubungan kedua himpunan.

   Penyelesaian:

   $R = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 4)\}$

2. Pasangan berurutan $(x – 4, 3)$ dan $(1, 6 + y)$ adalah *sama*. Tentukan x dan y.

   Penyelesaian:

   $(x – 4, 3)$ dan $(1, 6 + y)$ adalah *sama*, maka

   $x – 4 = 1 \qquad 3 = 6 + y$

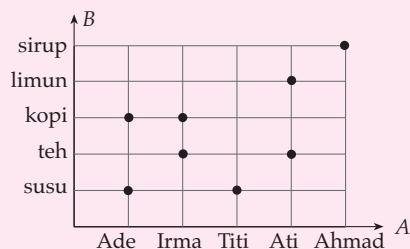
   $x = 5 \qquad y = 3 – 6$

   $y = –3$

   Jadi, nilai $x = 5$ dan $y = –3$.

LATIHAN 2

1. Dengan diagram Cartesius, tunjukkan relasi *"faktor dari"* himpunan $P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ ke $R = \{1, 6, 12, 17, 30, 35\}$.
2. Misal relasi dari himpunan A ke himpunan B dinyatakan dengan pasangan berurutan $\{(–2, 0), (–1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$.

   Tentukan:
   a. himpunan A;
   b. himpunan B;
   c. relasi yang mungkin.
3. Jika $B = A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 18, 24, 32\}$ dan relasi dari A ke B adalah *"faktor dari"*, nyatakan relasi itu dengan:
   a. diagram Cartesius;
   b. pasangan berurutan.
4. Diketahui $P = \{2, 3, 5, 7\}$ dan $R = \{6, 15, 21\}$.
   a. Jika relasi dari P ke R adalah "faktor dari", nyatakan relasi tersebut dengan pasangan berurutan.
   b. Jika relasi dari R ke P adalah "tiga kali dari", nyatakan relasi dengan diagram panah.
5.

   Dari gambar di atas, tentukan:
   a. himpunan A;
   b. himpunan B;
   c. relasi yang mungkin dari A ke B.

3 Daerah Asal, Daerah Kawan, dan Daerah Hasil

Mari kita perhatikan Gambar 2.3 yang menunjukkan relasi dari himpunan A ke himpunan B. Pada relasi dua himpunan, dikenal istilah:

a. daerah asal atau *domain*
b. daerah kawan atau *kodomain*
c. daerah hasil atau *range*

Domain atau *daerah asal* adalah himpunan yang akan dipasangkan ke himpunan lainnya. Misalkan R adalah suatu relasi dari A ke B, maka domain dari R adalah semua anggota himpunan A dinotasikan D_f, dengan

$$D_f = \{a \in A, (a, b) \in R\}$$

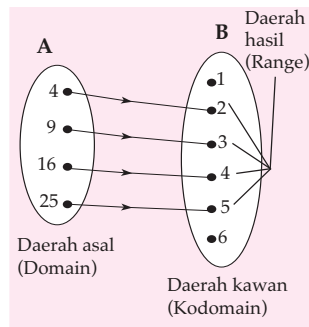
Perhatikan kembali Gambar 2.3. Himpunan $A = \{4, 9, 16, 25\}$ adalah *domain* dari relasi kedua himpunan.

Daerah Kawan disebut juga *kodomain*. Pada Gambar 2.3, yang disebut daerah kawan adalah himpunan $B = (1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Daerah hasil disebut juga *range*. Misalkan R relasi himpunan A ke himpunan B maka jangkauan atau *range* adalah semua anggota himpunan B yang berpasangan dengan anggota himpunan A dan muncul dalam pasangan berurutan dinotasikan R_f, dengan

$$R_f = \{b \mid b \in B, (a, b) \in R\}$$

Pada Gambar 2.3, yang dimaksud dengan daerah hasil adalah $\{2, 3, 4, 5\}$. Daerah hasil disebut juga bayangan dari himpunan A.

Daerah hasil atau *range* sama dengan himpunan B jika seluruh anggota B merupakan hasil relasi dari himpunan A.

Gambar 2.3 Relasi himpunan A ke himpunan B

B Fungsi

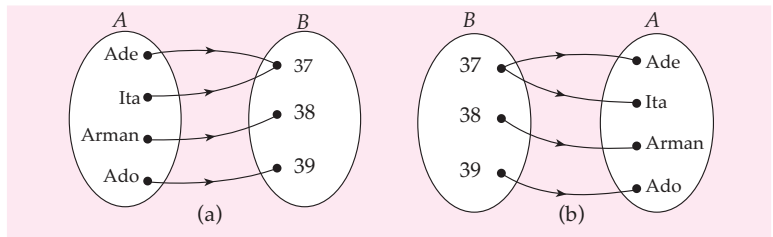
Pada subbab sebelumnya kalian telah mempelajari relasi. Pada pembahasan kali ini akan dipelajari fungsi. Ingin tahu perbedaan relasi dan fungsi, perhatikan pembahasan berikut.

1 Pengertian Fungsi atau Pemetaan

Coba kalian pahami penjelasan dari contoh fungsi berikut. Empat siswa, yaitu Ade, Ita, Arman, dan Ado mempunyai ukuran sepatu masing-masing 37, 37, 38, dan 39.

Misalkan A adalah kumpulan siswa, yaitu Ade, Ita, Arman, dan Ado, ditulis A = {Ade, Ita, Arman, Ado} dan B adalah kumpulan nomor sepatu siswa, ditulis $B = \{37, 38, 39\}$ maka himpunan A dan himpunan B dihubungkan dengan relasi *"memiliki ukuran sepatu"*. Setiap anak di A hanya mempunyai satu ukuran sepatu di B. Relasi seperti ini disebut *fungsi* atau *pemetaan*. Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa setiap anggota A dapat dipasangkan dengan tepat satu anggota B.

Fungsi atau *pemetaan* adalah suatu relasi khusus yang menghubungkan setiap anggota himpunan A ke himpunan B dengan ketentuan setiap anggota himpunan A hanya dipasangkan tepat dengan satu anggota himpunan B dan semua anggota di A harus memiliki pasangan di B.

Jika relasinya dibalik seperti Gambar 2.4, yaitu himpunan B dihubungkan ke himpunan A maka relasi ini *bukan* suatu *fungsi* karena terdapat satu anggota himpunan B yang dipasangkan lebih dari satu anggota himpunan A.

Gambar 2.4 Relasi dua himpunan: (a) fungsi dan (b) bukan fungsi

Setelah kalian memahami pengertian tentang fungsi, *cobalah kalian cari contoh-contoh kejadian atau masalah sehari-hari yang dapat dinyatakan sebagai fungsi. Kemudian jelaskan dengan kata-katamu sendiri, mengapa kejadian atau masalah itu dapat disebut suatu fungsi.*

2 Fungsi dalam Kejadian Sehari-hari

Berikut ini akan diberikan salah satu contoh fungsi dalam kehidupan sehari-hari.

Setiap mendapat gaji, Andi selalu mendapat potongan untuk biaya asuransi jiwa sebesar Rp15.000,00 per bulan. Misalkan besar potongan gaji Andi dilambangkan dengan y dan jumlah bulan Andi telah bekerja dilambangkan dengan x.

Apabila kita mengetahui lama Andi bekerja, kita dapat menghitung besar potongan gaji Andi selama bekerja dengan menggunakan rumus $y = 15.000x$. Rumus semacam itu disebut *bentuk fungsi.*

Bentuk fungsi $y = 15.000x$ di atas dapat diartikan sebagai berikut.

Jika $x = 1$ maka nilai $y = 15.000\ (1) = 15.000$

$x = 2$ maka nilai $y = 15.000\ (2) = 30.000$

$x = 3$ maka nilai $y = 15.000\ (3) = 45.000$ dan seterusnya

Dari uraian bentuk fungsi di atas, *dapatkah kalian menentukan bentuk umum dari sebuah fungsi? Apakah yang dapat kalian simpulkan dari contoh fungsi di atas? Bandingkan jawaban kalian dengan penjelasan berikut.*

Bentuk fungsi di atas dapat dinyatakan dengan persamaan $y = f(x)$. x merupakan domain dari fungsi f dan disebut *variabel bebas* karena nilainya dapat diganti dengan berbagai bilangan. y disebut *variabel tak bebas* (bergantung) karena nilainya ditentukan oleh x.

Contoh SOAL

Jika luas sebuah lingkaran 3 kali jari-jarinya, tentukanlah:

a. bentuk fungsi untuk menghitung luas lingkaran tersebut;

b. variabel bebas dan variabel tak bebas dari bentuk fungsi tersebut.

Penyelesaian:

a. Misalkan luas lingkaran dilambangkan dengan L dan jari-jari dilambangkan dengan r maka bentuk fungsi untuk menghitung luas lingkaran adalah $L = 3r$.

b. Variabel bebasnya adalah r dan variabel tak bebasnya adalah L.

LATIHAN 3

1. Harga sebuah tanah di kota Jakarta per m^2 adalah Rp300.000,00. Tentukanlah
   a. bentuk fungsi untuk menentukan harga tanah per m^2;
   b. variabel bebas dan variabel tak bebas dari kejadian itu.
2. Umur Andi setengah kali umur ayahnya. Tentukanlah
   a. bentuk fungsi untuk menentukan umur ayahnya Andi;
   b. variabel bebas dan variabel tak bebas dari kejadian itu.
3. Pengeluaran keluarga Pak Anton dalam sebulan dua kali gaji Pak Anton. Tentukanlah
   a. bentuk fungsi untuk menentukan pengeluaran keluarga Pak Anton;
   b. variabel bebas dan variabel tak bebas dari kejadian itu.
4. Panjang sebuah persegi panjang adalah 3 kali lebarnya. Tentukanlah
   a. bentuk fungsi untuk menentukan panjang persegi panjang;
   b. variabel bebas dan variabel tak bebas dari kejadian itu.

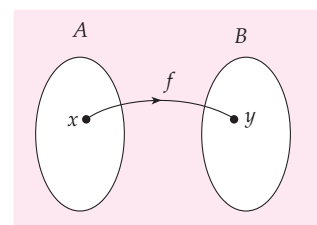
3 Notasi Fungsi dan Grafik Fungsi pada Bidang Cartesius

Misalkan $x \in A$ dan $y \in B$. Himpunan A dan himpunan B dihubungkan dengan relasi f. Kita dapat menuliskan hubungan antara himpunan A dan himpunan B dengan notasi sebagai berikut.

$$f : x \longrightarrow y$$

(dibaca: *f memetakan x* ke y dengan y disebut *peta x* oleh f).

Gambar 2.5 Pemetaan $f : x \rightarrow y$

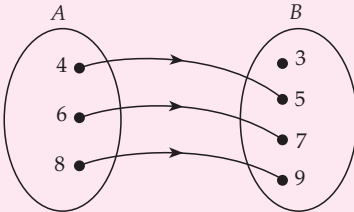
Jika A= {2, 3, 4, 5, 6} dan B = {1, 2, 3, 4, 5} dihubungkan dengan relasi *"satu lebihnya dari"*, maka pasangan-pasangan relasi anggota himpunan ditulis sebagai berikut.

$2 \to 1$ (dibaca: 2 satu lebihnya dari 1), $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$

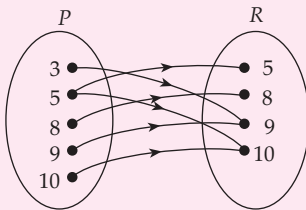
Secara umum ditulis $x \to x - 1$

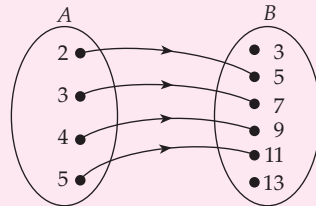
sehingga notasi fungsinya ditulis $f(x) = x - 1$

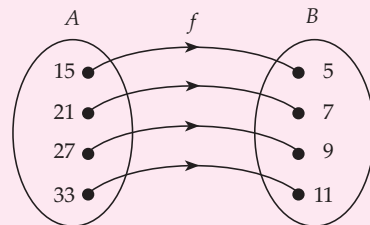
Fungsi dari $f : x \to x - 1$ dengan domain $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ mempunyai himpunan nilai fungsi $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Himpunan nilai fungsi tersebut biasa dinamakan *hasil fungsi* atau *range*.

LATIHAN 4

1. Perhatikan gambar di bawah ini.

   a. Apakah relasi dari A ke B merupakan fungsi?
   b. Tentukan relasi dari A ke B, daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil.

2.

   Perhatikan gambar di atas.
   a. Apakah relasi P ke R merupakan fungsi?
   b. Tentukanlah relasi yang menghubungkan P ke R, daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil.

3. Dari gambar di bawah ini.

   Tentukanlah
   a. notasi fungsi;
   b. D_f;
   c. R_f.

4. Dari gambar di bawah ini, tentukan notasi fungsi.

5. Sebuah fungsi dinotasikan dengan $f : x \to 2x + 2$, dengan $x \in A$ dan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tentukan R_f.

4 Cara Menyatakan Fungsi/Pemetaan

Jika suatu fungsi memetakan setiap anggota x dari himpunan A tepat dengan satu anggota y dari himpunan B dengan relasi maka dapat dinyatakan dengan notasi

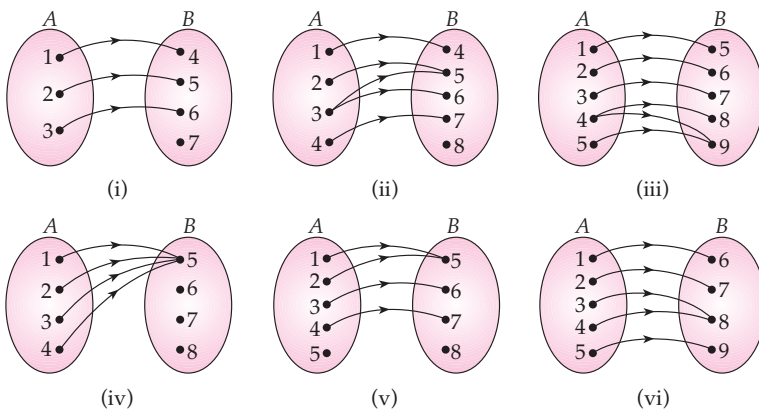
$$f : x \to y$$

Suatu fungsi dapat juga dinyatakan dengan diagram panah, diagram Cartesius, dan himpunan pasangan berurutan.

a. Diagram panah

Pada bagian sebelumnya telah kita ketahui bahwa diagram panah merupakan salah satu cara yang sering digunakan untuk menyatakan relasi dua himpunan. Karena fungsi merupakan relasi, maka diagram panah juga dapat digunakan untuk menyatakan fungsi.

Dengan memahami definisi fungsi, kita dapat menentukan suatu diagram panah merupakan fungsi atau relasi.

Coba kalian perhatikan diagram panah berikut ini.

(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

(i) fungsi;

(ii) bukan fungsi karena salah satu anggota A berpasangan dengan dua anggota B, yaitu $3 \to 5$, $3 \to 6$;

(iii) bukan fungsi karena salah satu anggota A berpasangan dengan dua anggota B, yaitu $4 \to 8$, $4 \to 9$;

(iv) fungsi;

(v) bukan fungsi karena ada anggota A yang tidak berpasangan dengan anggota B, yaitu 5;

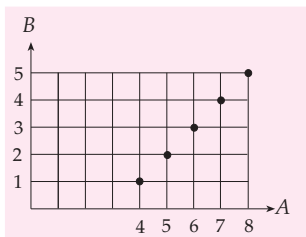
(vi) fungsi.

Kerjakan bersama teman sebangkumu.

Dari penjelasan di atas, apa yang dapat kalian simpulkan mengenai diagram panah yang merupakan fungsi? Jika kalian mengalami kesulitan carilah informasi dari buku-buku yang ada di perpustakaan sekolah kalian. Bacakan hasil yang kalian peroleh di depan kelas dan bandingkan dengan hasil teman yang lain.

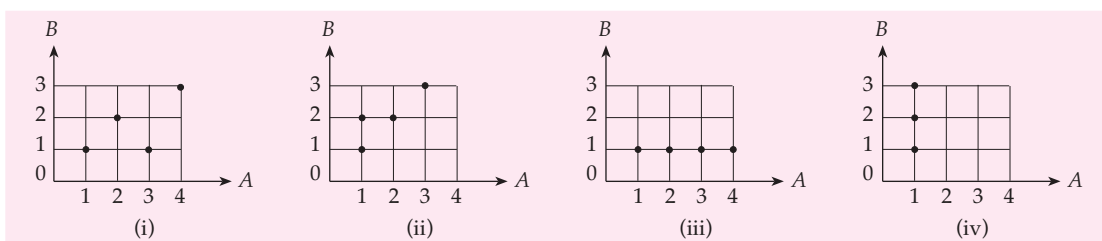
b. Diagram Cartesius

Suatu relasi dapat dinyatakan dengan diagram Cartesius, begitu juga dengan fungsi.

Untuk menentukan suatu relasi kedua himpunan merupakan fungsi atau bukan pada diagram cartesius adalah dengan melihat absisnya (nilai-nilai pada sumbu–X). Jika terdapat absis yang mempunyai pasangan lebih dari 1 maka relasi kedua himpunan tersebut bukan fungsi.

Gambar 2.6 Hubungan himpunan A ke B dengan relasi "tiga lebihnya dari"

Misalkan dua buah himpunan, yaitu $A = (4, 5, 6, 7, 8\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dihubungkan dari A ke B dengan relasi "*tiga lebihnya dari*". Relasi himpunan A ke B dapat dinyatakan dalam bentuk diagram Cartesius, seperti pada Gambar 2.6.

Relasi himpunan A ke B pada Gambar 2.6 merupakan fungsi karena setiap anggota himpunan A dipasangkan dengan tepat ke satu anggota himpunan B.

Perhatikan diagram Cartesius berikut. *Dapatkah kalian menentukan mana yang fungsi dan mana yang bukan?*

Dari diagram Cartesius di atas dapat ditentukan bahwa:

(i) fungsi;

(ii) bukan fungsi karena salah satu anggota A berpasangan dengan dua anggota B, yaitu $1 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$;

(iii) fungsi;

(iv) bukan fungsi karena salah satu anggota A berpasangan dengan tiga anggota B, yaitu $1 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$.

Melalui diagram Cartesius, fungsi dapat dikenali jika memenuhi syarat tidak ada koordinat titik yang merupakan *domain* yang dipasangkan dengan lebih dari satu anggota yang merupakan *kodomain.*

c. Pasangan Berurutan

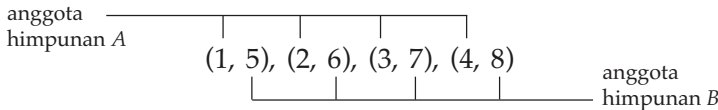
Fungsi dapat juga dinyatakan dengan pasangan berurutan. Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan bahwa jika R adalah relasi dari A ke B maka pasangan berurutan dari relasi tersebut ditulis seperti berikut.

$$R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Suatu relasi R merupakan fungsi atau bukan, dapat ditentukan dengan melihat anggota himpunan A. Jika anggota himpunan A muncul lebih dari satu kali maka relasi tersebut bukan fungsi.

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{5, 6, 7, 8\}$, serta relasi yang menghubungkan himpunan A ke B adalah "*empat kurangnya dari*", maka pemetaan dari A ke B dapat dinyatakan dengan pasangan berurutan sebagai berikut.

$$\{(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)\}$$

Anggota pasangan berurutan pertama adalah anggota himpunan A dan anggota pasangan berurutan kedua adalah anggota himpunan B.

Perhatikan pasangan-pasangan berurutan berikut. Manakah yang merupakan fungsi?

(i) (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5);

(ii) (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4);

(iii) (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3);

(iv) (5, 1), (6, 2), (7, 3), (5, 4).

Berdasarkan definisi fungsi, pernyataan di atas dapat kita simpulkan sebagai berikut.

(i) fungsi;

(ii) bukan fungsi karena terdapat anggota A yang muncul lebih dari satu kali, yaitu (1, 3) dan (1, 4) ;

(iii) fungsi;

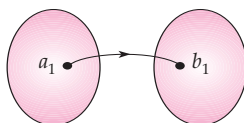
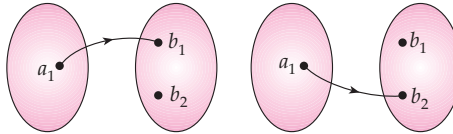
(iv) bukan fungsi karena terdapat anggota A yang dipasangkan lebih dari satu kali ke anggota B, yaitu (5, 1) dan (5, 4).

5 Banyaknya Pemetaan

Tentunya sekarang kalian telah memahami pengertian dari fungsi dan kalian kini telah dapat membedakan mana relasi yang disebut fungsi dan mana yang bukan fungsi. Selanjutnya, bagaimanakah menentukan banyaknya pemetaan yang terjadi antara dua himpunan yang berbeda? Untuk mengetahui jawaban pertanyaan tadi, pelajari penjelasan di bawah ini.

a. $A = \{a_1\}$

Banyak pemetaan dari himpunan A ke himpunan B dapat ditentukan dengan pengamatan sebagai berikut.

1) $A = \{a_1\}$ dan $B = \{b_1\}$ maka $n(A) = 1$ dan $n(B) = 1$.

2) $A = \{a_1\}$ dan $B = \{b_1, b_2\}$ maka $n(A) = 1$ dan $n(B) = 2$

Untuk $n\ (A) = 1$ dan

$n(B) = 1$ maka banyak pemetaan A ke B adalah 1^1.

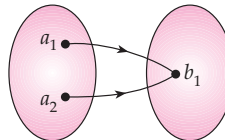
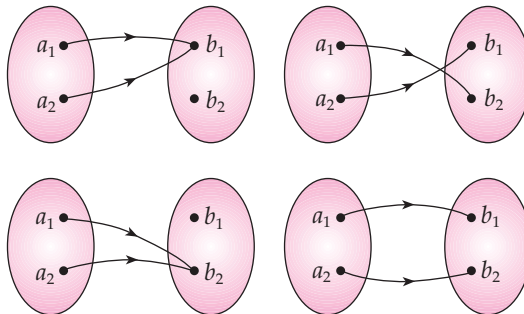
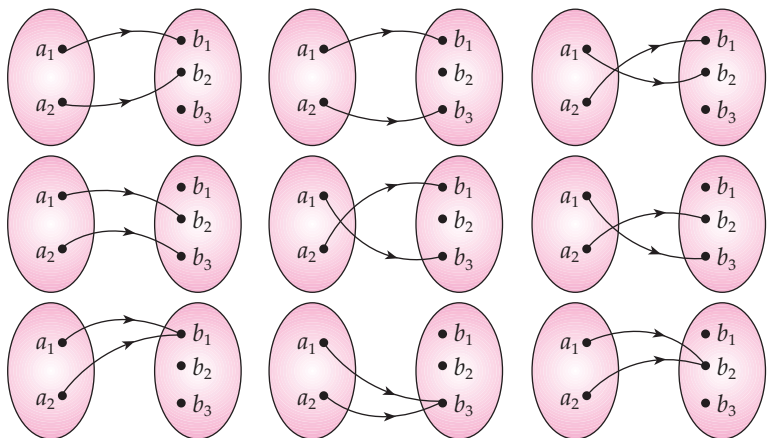
$n(B) = 2$ maka banyak pemetaan A ke B adalah 2^1.

⋮ ⋮

$n(B) = r$ maka banyak pemetaan A ke B adalah r^1.

b. $A = \{a_1, a_2\}$

Banyak pemetaan dari himpunan A ke himpunan B dapat di tentukan dengan pengamatan sebagai berikut.

1) $A = \{a_1, a_2\}$ dan $B = \{b_1\}$ maka $n(A) = 2$ dan $n(B) = 1$.

2) $A = \{a_1, a_2\}$ dan $B = \{b_1, b_2\}$ maka $n(A) = 2$ dan $n(B) = 2$.

3). $A = \{a_1, a_2\}$ dan $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ maka $n(A) = 2$ dan $n(B) = 3$.

Untuk $n(A) = 2$ dan

$n(B) = 1$ maka banyak pemetaan A ke B adalah 1^2.

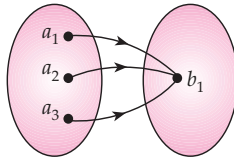
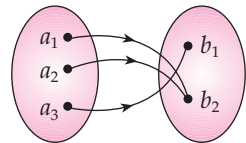
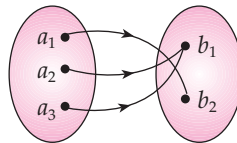
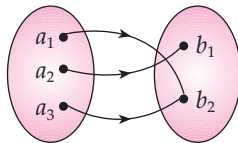
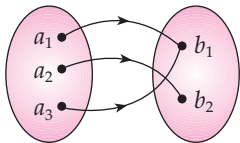
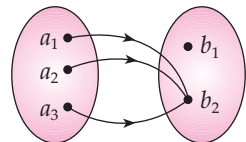
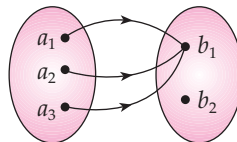
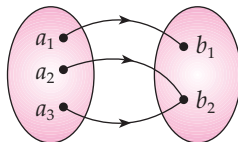
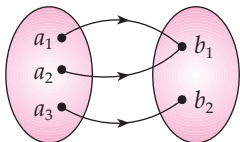
$n(B) = 2$ maka banyak pemetaan A ke B adalah 2^2.

$\vdots$ $\vdots$

$n(B) = r$ maka banyak pemetaan A k e B adalah r^2.

c. $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

Banyaknya pemetaan dari himpunan A ke himpunan B dapat ditentukan dengan pengamatan sebagai berikut.

1) $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dan $B = \{b_1\}$ maka $n(A) = 3$ dan $n(B) = 1$.

2) $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ dan $B = \{b_1, b_2\}$ maka $n(A) = 3$ dan $n(B) = 2$.

Dari gambar di atas, dapat dinyatakan bahwa untuk $n(A) = 3$ dan

$n(B) = 1$ maka banyak pemetaan A ke B adalah 1^3.

$n(B) = 2$ maka banyak pemetaan A ke B adalah 2^3.

$\vdots$ $\vdots$

$n(B) = r$ maka banyak pemetaan A ke B adalah r^3.

Jika $n(A) = a$ dan $n(B) = b$, berapakah banyaknya pemetaan dari A ke B dan dari B ke A? Diskusikan hasil yang kalian peroleh dengan hasil temanmu.

Contoh SOAL

Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan $B = \{a, b, c\}$. Tentukan banyaknya pemetaan dari:

a. A ke B b. B ke A

Penyelesaian:

$n(A) = 4$ dan $n(B) = 3$, maka banyak pemetaan dari A ke B adalah

$$n(B)^{n(A)} = 3^4 = 81$$

banyak pemetaan dari B ke A adalah

$$n(A)^{n(B)} = 4^3 = 64$$

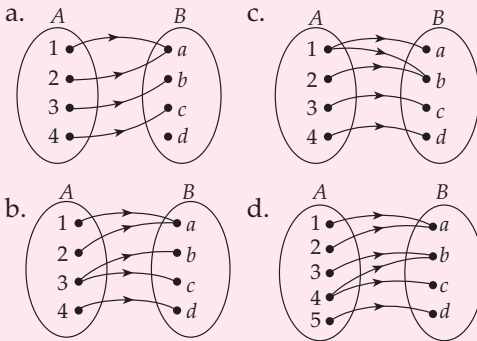
LATIHAN 5

1. Dari diagram panah di bawah ini, manakah yang merupakan pemetaan?

a.

c.

b.

d.

2. Dari pasangan berurutan di bawah ini manakah yang merupakan pemetaan/fungsi?
   a. {(2, 5) (3, 6) (4, 7) (5, 8) (6, 9)}
   b. {(3, 4) (3, 6) (3, 7) (3, 8) (3, 9)}
   c. {(1, 2) (3, 2) (4, 2) (5, 2) (6, 2)}
   d. {(1, 3) (3, 4) (4, 5) (5, 6) (6, 7)}

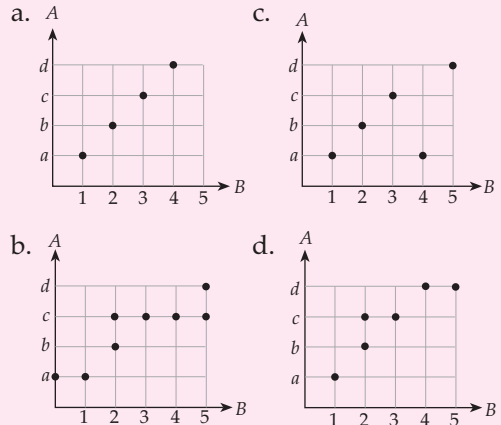
3. Relasi-relasi di bawah ini, manakah yang merupakan pemetaan dari himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ke himpunan $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$?
   a. satu kurangnya dari
   b. setengah kalinya dari
   c. dua kalinya dari

4. Dari diagram Cartesius berikut ini, manakah yang merupakan pemetaan?

a.

c.

b.

d.

5. Tentukan banyak pemetaan dari A ke B dan dari B ke A jika:
   a. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = [a, b\}$
   b. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c\}$
   c. $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{\mathrm{a}, b, c\}$
   d. $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{a, b\}$

6. Jika $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan banyaknya pemetaan dari A ke B adalah 32, tentukan banyak anggota himpunan B.

6 Pengertian Korespondensi Satu-Satu

Korespondensi satu-satu dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi khusus yang memasangkan setiap anggota himpunan A tepat dengan satu anggota himpunan B dan sebaliknya setiap anggota B dipasang tepat dengan satu anggota A.

A, B, f, a_1, a_2, $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$

Gambar 2.7 Korespondensi satu-satu dari himpunan A ke B

Korespondensi satu-satu dari himpunan A ke himpunan B dapat terjadi jika banyak anggota kedua himpunan itu sama banyak.

$$n(A) = n(B)$$

Secara lebih singkat, jika f memetakan satu-satu himpunan A ke himpunan B maka korespondensi satu-satu dari himpunan A ke himpunan B dilambangkan

$$f : A \rightarrow B$$

Banyak korespondensi satu-satu dari A ke A adalah $n(A)$!

Contoh SOAL

1. Dari himpunan-himpunan di bawah ini, manakah yang dapat berkorespondensi satu-satu.
   a. $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$
   b. $A = \{x, y, z\}$ dan $B = \{1, 2\}$

   Penyelesaian:
   a. $n(A) = 3$ dan $n(B) = 3$ maka $n(A) = n(B)$ sehingga himpunan A dan B dapat berkorespondensi satu-satu.
   b. $n(A) = 3$, $n(B) = 2$ maka $n(A) \neq n(B)$ sehingga himpunan A dan B tidak dapat berkorespondensi satu-satu.

2. Tentukanlah banyaknya korespondensi satu-satu dari A ke A jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

   Penyelesaian:
   $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $n(A) = 4$
   Banyak korespondensi satu-satu dari A ke $A = n(A)! = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

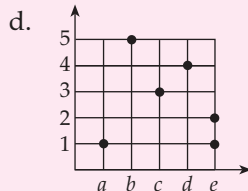
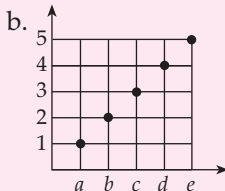
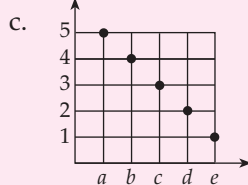
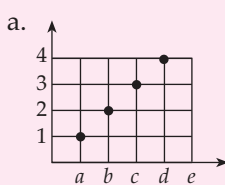
LATIHAN 6

1. Dari diagram Cartesius di bawah ini, manakah yang merupakan korespondensi satu-satu?

   a.

   c.

   b.

   d.

2. Dari pasangan berurutan di bawah ini, manakah yang merupakan korespondensi satu-satu.
   a. {(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)}
   b. {(3, 2), (3, 4), (3, 3), (4, 5), (5, 6)}
   c. {(4, 5), (6, 7), (7, 8), (8, 7), (9, 6)}
   d. {(2, 3), (3, 4), (5, 7), (6, 6), (7, 8)}

3. Dari pasangan-pasangan di bawah ini, manakah yang merupakan korespondensi satu-satu.
   a. $A = \{1, 2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$
   b. A = {jari-jari pada tangan},
      B = {hari dalam seminggu}
   c. $A = \{A, B, C\}$,
      $B = \{B, C, A\}$
   d. A = {bilangan asli kurang dari 7}
      B = {bilangan prima kurang dari 15}
   e. A = {siswa kelas 2}
      B = {umur}

4. Tulislah empat contoh korespondensi satu-satu dalam kehidupan sehari-hari.

5. Seorang penjual membuat kode harga suatu barang sebagai berikut.

S	I	A	P	T	E	R	J	U	N
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

   Jika ISS menunjukkan Rp100,00, tentukan harga barang jika kode harganya:
   a. J E S S
   b. P E R S S S
   c. E S S S S S
   d. T E R S S S S

6. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Tentukanlah banyaknya korespondensi satu-satu dari huruf A ke B.

7. Diketahui suatu fungsi $f: x \to x^3$ dengan $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Tentukanlah:
   a. diagram panah yang menyatakan korespondensi satu-satu;
   b. R_f.

C Nilai Fungsi

Sekarang kalian tentu sudah memahami pengertian fungsi notasinya. Pada pembahasan kali ini akan dipelajari menghitung nilai fungsi. Untuk menghitung nilai fungsi kalian harus sudah memahami notasi fungsi.

1 Menghitung Nilai Fungsi

Sebagaimana yang telah disinggung sebelumnya, fungsi dapat dinyatakan dalam bentuk notasi.

$$f(x) : x \longrightarrow x + 2$$

(dibaca: fungsi dari x memetakan x ke $x + 2$)

Biasanya bentuk notasi ini juga dapat dinyatakan dalam bentuk rumus, yaitu $f(x) = x + 2$, ($f(x)$ dibaca fungsi dari x).

Apabila nilai x pada fungsi tersebut diganti dengan bilangan asli yang kurang dari 5, akan diperoleh nilai fungsi seperti berikut.

Untuk $x = 1$, nilai fungsi itu adalah $f(1) = 1 + 2 = 3$

Untuk $x = 2$, nilai fungsi itu adalah $f(2) = 2 + 2 = 4$

Untuk $x = 3$, nilai fungsi itu adalah $f(3) = 3 + 2 = 5$

Untuk $x = 4$, nilai fungsi itu adalah $f(4) = 4 + 2 = 6$

Contoh SOAL

1. Tentukan nilai dari $f(x) = x - 9$ untuk $x = 2$ dan $x = -9$.

   Penyelesaian:

   $f(x) = x - 9$
   $f(2) = 2 - 9 = -7$
   $f(-9) = -9 - 9 = -18$

2. Suatu fungsi $h : y \rightarrow 3y^2 - 2$.

   Tentukanlah:
   a. $h(-3)$;
   b. nilai x jika $h(x) = 25$.

Penyelesaian:

a. $h : y \rightarrow 3y^2 - 2$ dapat dinyatakan sebagai
   $h(y) = 3y^2 - 2$
   $h(-3) = 3(-3)^2 - 2$
   $= 3(9) - 2$
   $= 25$

b. $h(x) = 25$
   $h(x) = 3x^2 - 2$
   $3x^2 - 2 = 25$
   $3x^2 = 27$
   $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$
   Jadi, $x = 3$ dan $x = -3$.

LATIHAN 7

1. $f : x \to 3x + 5$
   Tentukanlah:
   a. rumus fungsi f;
   b. bayangan fungsi dari $x = 2$ dan $x = –5$.
2. Dari fungsi $g : x \to 4x – 1$, tentukanlah:
   a. $g(27)$ c. $g(0,25)$
   b. $g(–8)$ d. $g\left(\frac{3}{5}\right)$
3. Jika fungsi $h(x) = 7x – 3$, tentukanlah:
   a. $h(3p)$ c. $h\left(\frac{4}{5}a\right)$
   b. $h(0,5n)$ d. $h(–5y)$
4. Tentukanlah nilai fungsi $f(x) = (x – 6) + 2x$ untuk:
   a. $f(8)$ c. $f\left(\frac{3}{2}\right)$
   b. $f(–10)$ d. $f(0,4)$
5. $f : x \to \frac{1}{4}(x + 6)$, tentukanlah:
   a. bayangan dari 4 dan 8;
   b. nilai x jika bayangannya 3.
6. Tentukanlah nilai a dari rumus $g(x) = 2x + 9$, jika diketahui
   a. $g(a) = 36$
   b $g(a) = –5$

2 Tabel Fungsi

Kalian dapat membuat tabel dari suatu fungsi. Tabel fungsi dibuat untuk lebih mempermudah melihat hubungan antara domain dan hasil fungsi, misalnya $f(x) = x + 1$ dengan domain $x = 1, 2, 3, 4, 5$. Tabel fungsi dapat dibuat dengan menentukan nilai-nilai fungsi terlebih dahulu.

Untuk $x = 1$ nilai fungsi adalah $f(1) = 1 + 1 = 2$
Untuk $x = 2$ nilai fungsi adalah $f(2) = 2 + 1 = 3$
Untuk $x = 3$ nilai fungsi adalah $f(3) = 3 + 1 = 4$
Untuk $x = 4$ nilai fungsi adalah $f(4) = 4 + 1 = 5$
Untuk $x = 5$ nilai fungsi adalah $f(5) = 5 + 1 = 6$

Nilai x dan nilai fungsi x dapat dibuat dalam tabel sebagai berikut.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	3	4	5	6

Contoh SOAL

1. Buatlah tabel fungsi dari $f : x \to x + 2$ untuk $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   Penyelesaian:
   Tabel fungsi $f : x \to x + 2$ untuk $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, yaitu sebagai berikut.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	4	5	6	7

2. Buatlah tabel fungsi untuk $f : x \to x^2 + 3x + 2$ untuk $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Penyelesaian:
Tabel fungsi $f : x \to x^2 + 3x + 2$ untuk $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ yaitu sebagai berikut.

x	1	2	3	4	5
x^2	1	4	9	16	25
$3x$	3	6	9	12	15
2	2	2	2	2	2
$f(x)$	6	12	20	30	42

LATIHAN 8

1. Buatlah tabel fungsi dari $f : x \to 3x$ dengan $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
2. Salin dan isilah tabel fungsi berikut jika fungsi $f : x \to 5x$

x	1	3	5	....	....	....	18	20
$f(x)$	....	....	....	30	45	60	....	....

3. Salin dan isilah tabel fungsi berikut untuk $f : x \to \frac{1}{3}x$.

x	–6	–3	0	3	6	9
$\frac{1}{3}x$						
$f(x)$						

4. Buatlah tabel fungsi $f : x \to x^2 + 4x - 1$ dengan $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
5. Berikut ini tabel besarnya upah yang diterima Roni dan banyaknya jam kerja.

Jam kerja (i)	12	10	18	9	4	16
Upah (ribuan)	....	....	....	162	32	512

   a. Apakah tabel di atas menggambarkan sebuah fungsi?
   b. Temukan sebuah persamaan yang menggambarkan hubungan jam kerja dan upah yang diterima.

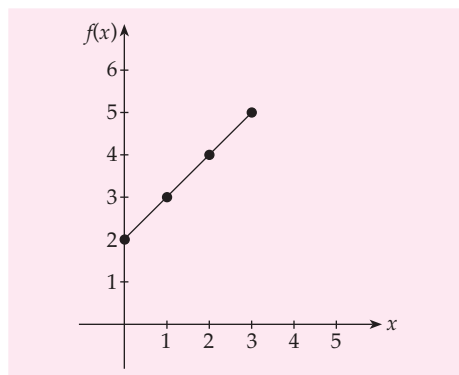
3 Grafik Fungsi

Setelah kalian mengetahui cara menghitung nilai suatu fungsi, dapatkah kalian melukis atau menggambarkan fungsi tersebut dalam bentuk grafik? Bagaimanakah caranya?

Untuk melukis atau menggambar grafik suatu fungsi, akan lebih mudah jika kalian membuat tabel fungsi terlebih dahulu. Misalnya $f(x) = x + 2$ dengan $x = 0, 1, 2, 3$.

Didapat tabel fungsi sebagai berikut.

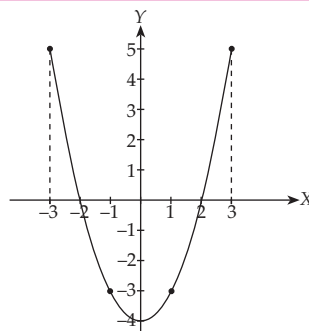
x	0	1	2	3
$x + 2$	2	3	4	5
$(x, f(x))$	(0, 2)	(1, 3)	(2, 4)	(3, 5)

$f(x)$ pada tabel fungsi dinyatakan sebagai sumbu-Y seperti terlihat pada gambar di bawah ini.

Contoh SOAL

Gambarlah grafik $f(x) = x^2 - 4$, untuk $x = -3, -2, -1, 0, -1, -2, -3$.

Penyelesaian

Tabel fungsi

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x^2 - 4$	5	0	-3	-4	-3	0	5
$(x, f(x))$	$(-3, 5)$	$(-2, 0)$	$(-1, -3)$	$(0, -4)$	$(1, -3)$	$(2, 0)$	$(3, 5)$

LATIHAN 9

1. Gambarkanlah grafik fungsi $f(x) = x - 1$ dengan $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.
2. Fungsi $g(x) = 1 - 2x$ dengan daerah asal $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
   a. Buatlah tabel fungsi g.
   b. Gambarlah grafik fungsi tersebut.
3. a. Buatlah tabel fungsi $f(x) = x^2 - 2$ dengan $x = -2, -1, 0, 1, 2$
   b. Gambarlah grafik fungsinya.
4. a. Buatlah tabel dari $f : x \rightarrow 3 - 2x$ dengan domain $\{-2, 0, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
   b. Gambarlah grafik fungsi tersebut.
5. Coba kalian gambarkan grafik fungsi berikut dengan nilai $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$
   a. $f(x) = 2x - 3$
   b. $f(x) = 3 - 2x$
   c. $f(x) = x^2 - 3$
   d. $f(x) = 3 - x^2$
   e. $f(x) = x^2 + 2x - 3$

4 Menentukan Bentuk Fungsi

Suatu fungsi dapat ditentukan bentuknya jika diketahui grafik, tabel atau data fungsi. Pada pembahasan berikut, kalian akan menentukan bentuk suatu fungsi jika data fungsi diketahui. Suatu fungsi dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan berurutan, misalnya (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8) dan seterusnya. Untuk mendapatkan bentuk fungsi dan pasangan berurutan itu dapat dipahami dengan memerhatikan uraian berikut.

x	$f(x)$	Bentuk Fungsi
2	5	$2 + 3$
3	6	$3 + 3$
4	7	$4 + 3$
5	8	$5 + 3$
⋮	⋮	⋮
x	$f(x)$	$x + 3$

Jadi, bentuk fungsi x di atas adalah $f(x) = x + 3$.

Contoh SOAL

1. Tentukanlah bentuk fungsi dari pasangan berurutan (2, 8), (3, 9), (4, 10), (5, 11), (6, 12).

   Penyelesaian:

x	$f(x)$	**Bentuk fungsi**
2	8	2 + 6
3	9	3 + 6
4	10	4 + 6
5	11	5 + 6
6	12	6 + 6

   Jadi, bentuk fungsinya adalah $f(x) = x + 6$.

2. Diketahui fungsi $f(x) = ax + b$. Tentukan bentuk fungsi f jika $f(3) = 4$ dan $f(-1) = 6$.

   Penyelesaian:

$$f(x) = ax + b$$
$$f(3) = a\,(3) + b = 3a + b$$
$$3a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - 3a$$
$$f(x) = ax + b$$
$$f(-1) = a\,(-1) + b = -a + b$$
$$f(-1) = 6$$
$$-a + b = 6$$

   Substitusi $b = 4 - 3a$ ke $-a + b = 6$, didapat

$$-a + (4 - 3a) = 6$$
$$4 - 4a = 6$$
$$-4a = 2$$
$$a = -\frac{1}{2}$$

   Substitusi $a = -\frac{1}{2}$ ke $b = 4 - 3a$, didapat

$$b = 4 - 3\,(-\tfrac{1}{2}) = \frac{8 + 3}{2} = \frac{11}{2}$$

   Jadi, bentuk fungsi f adalah $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$.

LATIHAN 10

1. Fungsi $f : x \longrightarrow px + q$. Jika $f(4) = 20$ dan $f(-2) = 2$, tentukanlah:
   a. nilai p dan q;
   b. bentuk fungsi f.
2. Diketahui $f(x) = bx + a$. Jika $f(4) = 36$ dan $f(-2) = 15$. Tentukanlah bentuk fungsi tersebut.
3. Tentukanlah bentuk fungsi dari pasangan berurutan (–1, –1), (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7).
4. Diketahui nilai fungsi untuk $x = 2$ dan $x = 5$ pada fungsi $g(x) = sx - t$ adalah 8 dan 12. Tentukan bentuk fungsi g.
5. Diketahui sebuah fungsi sebagai berikut.

y	–2	–1	0	1	2
$f(y)$	–11	–8	–5	–2	1

   Tentukan bentuk fungsi f.

D Aplikasi Konsep Fungsi dalam Kehidupan

Bentuk relasi dan fungsi banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari, seperti dalam bidang ekonomi, sosial, dan teknologi.

Korespondensi satu-satu juga sering kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contohnya adalah label harga barang yang ditampilkan dalam bentuk kode-kode tertentu.

Contoh SOAL

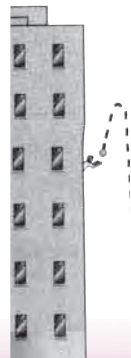
Suatu perusahaan memproduksi sebuah barang dengan kode tanggal produksi tertentu. Jika ABCDEFGHIJ berkorespondensi satu-satu dengan 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 dan CDAHBJIG menunjukkan kode barang untuk tanggal produksi 23 – 07 – 1986, tentukanlah:

a. tanggal produksi barang untuk kode:
   (i) BDAEBJIE
   (ii) CDAFCAAB
b. kode barang untuk tanggal produksi:
   (i) 13 April 1974
   (ii) 28 oktober 2001

Penyelesaian:

a. Tanggal produksi barang adalah sebagai berikut.
   (i) 13 April 1984
   (ii) 24 Mei 2001
b. Kode barang adalah sebagai berikut.
   (i) BDAEBJHE
   (ii) CIBACAAB

Soal-Soal Kontekstual

1. Empat orang siswa, yaitu Wati, Epi, Aspar, dan Sentot, masing-masing menyukai buah-buahan. Wati menyukai jeruk; Epi menyukai melon dan jeruk; Aspar menyukai apel, anggur, dan pisang; Sentot menyukai mangga dan apel. Buatlah diagram panah dari kedua himpunan dengan relasi "menyukai."
2. Lima orang siswa, yaitu Dede, Ike, Ani, Desi, dan Siska mengikuti ujian matematika dengan nilai berturut-turut 7, 6, 5, 8, 9. Jika B adalah himpunan nilai matematika, tentukanlah:
   a. diagram panah dari himpunan B ke A;
   b. relasi yang mungkin.
3. Ita berumur 7 tahun, Inda berumur 5 tahun, Afni berumur 4 tahun, Yuni berumur 5 tahun, dan Yuyun berumur 6 tahun. Buatlah diagram panah dengan relasi:
   a. umur dari;
   b. berumur.
4. Volume sebuah kubus dengan panjang rusuk a adalah $v = a^3$. Tentukanlah:
   a. panjang rusuk untuk v = 1, 8, 27, 64;
   b. diagram panah dari soal a.
5. Mey akan melakukan perjalanan ke rumah nenek. Waktu (t detik) untuk menempuh jarak (dalam km) pada kecepatan x km/jam dinyatakan dengan $s(x) = \frac{7.200}{x}$ Hitunglah waktu yang diperlukan jika:
   a. kecepatan 70 km/jam;
   b. kecepatan 120 km/jam.
6. Lintasan gerak sebuah bola dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x) = x^2 - 8x + 12$. Nilai x adalah waktu dalam detik dan nilai $f(x)$ mewakili ketinggian bola dari tanah. Dengan menggunakan waktu x = 2, 3, 4, 5, 6, pada detik ke berapa kali bola berada di posisi tertinggi?

Tugas Siswa

Kerjakanlah tugas berikut secara berkelompok atau bersama teman sebangkumu.

Carilah gambar di samping. Kemudian gunting dan tempelkan gambar itu dalam buku tugasmu.

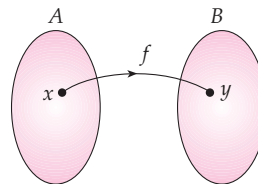
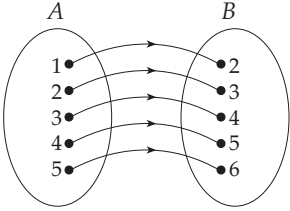
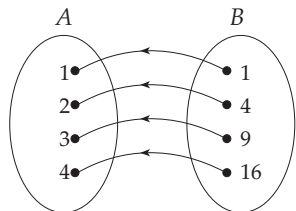
Perhatikan angka 2 sampai angka 9. Pada setiap angka tersebut terdapat huruf di atasnya. Buatlah gambar pemetaan yang memetakan:

a. angka ke huruf;

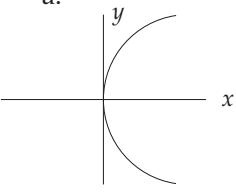
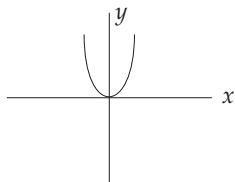
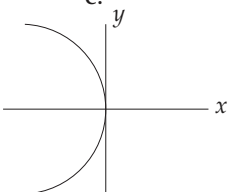
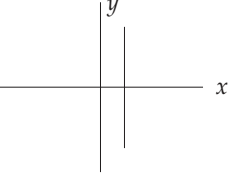
b. huruf ke angka.

Manakah dari dua pemetaan itu yang merupakan fungsi? Berikan alasanmu.

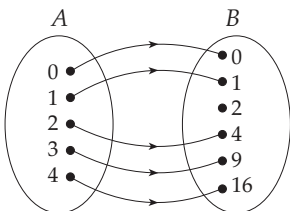
Rangkuman

1. Suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B terjadi jika ada anggota himpunan A dan B yang berpasangan.
2. Relasi dapat dinyatakan dengan diagram panah, diagram cartesius, dan himpunan pasangan berurutan.
3. Fungsi adalah relasi khusus yang menghubungkan setiap anggota domain dengan tepat satu ke anggota kodomain.
4. Suatu fungsi dengan notasi $f : x \to y$ dibaca fungsi f memetakan x ke y. Notasi fungsinya $f(x) = y$

5. Suatu himpunan dengan $n(A) = a$ dan $n(B) = b$
   Banyak fungsi A ke B adalah b^a.
   Banyak fungsi dari B ke A adalah a^b.
6. Dua himpunan dapat berkorespodensi jika banyak anggota kedua himpunan sama.
7. Suatu himpunan dengan $n(A) = n$ dan $n(B) = n$
   Banyak korespodensi satu-satu antara himpunan A dan B adalah $n!$

Uji Kompetensi Bab 2

A Pilihan ganda

Berilah tanda silang (×) pada huruf a, b, c, atau d pada jawaban yang benar.

1.

   Relasi yang mungkin dari A ke B adalah ....
   a. satu lebihnya dari
   b. satu kurangnya dari
   c. lebih dari
   d. kurang dari

2.

   Relasi yang mungkin dari B ke A adalah ....
   a. kuadrat dari
   b. akar kuadrat dari
   c. pangkat tiga dari
   d. akar pangkat tiga dari

3. Diagram di bawah ini yang merupakan pemetaan adalah ....

4. Diketahui $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   $Q = \{a, b, c, d\}$
   Banyaknya pemetaan dari Q ke P adalah ....
   a. 25 c. 625
   b. 256 d. 1.024

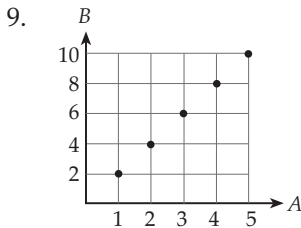
5. Perhatikan diagram anak panah berikut ini.

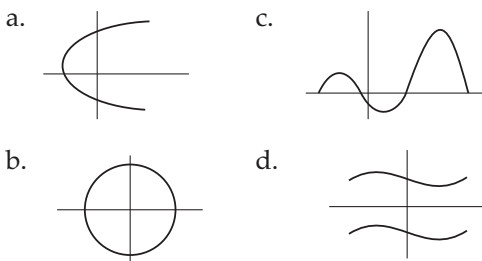
   (i) Domain : {0, 1, 2, 3, 4}
   (ii) Kodomain : {0, 1, 2, 4, 9, 16}
   (iii) Range : {0, 1, 4, 9, 16}
   (iv) Range : {2}

   Pernyataan yang benar pada pemetaan yang ditunjukkan oleh diagram di atas adalah ....
   a. (i), (ii) dan (iii) c. (i), (ii) dan (iv)
   b. (i) dan (ii) d. (ii) dan (iv)

6. Himpunan pasangan berurutan berikut ini yang merupakan fungsi adalah ....
   a. {(0,0), (2,1), (4,2), (6,3), (3,1), (4,–2), (6,–3)}
   b. {(a,1), (a,2), (b,3), (b,4), (c,5), (c,6)}
   c. {(1,0), (0,1), (1,1), (0,0), (0,2), (2,3), (2,4)}
   d. {(2,a), (3,a), (4,a), (5,a), (6,a)}

7. Relasi antara anggota himpunan A ke anggota himpunan B dinyatakan dengan pasangan berurutan $\{(3, \frac{1}{3}), (2\frac{1}{2}, \frac{2}{5}), (\frac{1}{3}, 3), (-\frac{1}{5}, -5)\}$. Relasi A ke B adalah ....
   a. hasil kali dari c. lawan dari
   b. kuadrat dari d. kebalikan dari

8. Sebuah fungsi dinyatakan dengan pasangan berurutan {(2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)}. Notasi fungsi yang mungkin adalah ....
   a. $f : x \to x + 2$ c. $f : x \to 2x + 1$
   b. $f : x \to x + 3$ d. $f : x \to 2x + 3$

9. Notasi fungsi yang mungkin dari A ke B adalah ....
   a. $f : x \to 2x$ c. $f : x \to x + 1$
   b. $f : x \to 4x$ d. $f : x \to x + 2$

10. Grafik di bawah ini yang merupakan pemetaan adalah ....
   a.
   c.
   b.
   d.

11. Pasangan berurutan di bawah ini yang merupakan fungsi adalah ....
   a. {(2, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)}
   b. {(3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8)}
   c. {(2, 3), (3, 4), (5, 6), (5, 7), (6, 8)}
   d. {(5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (8, 10)}

12. Jika A = {1, 2, 3, 4} dan B = {a, b, c} maka banyaknya pemetaan dari B ke A adalah ....
   a. 12 c. 64
   b. 24 d. 81

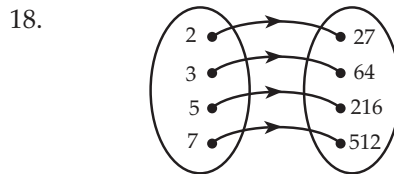
13. A = {bilangan prima lebih dari 10 dan kurang dari 20}. Jika banyaknya pemetaan dari A ke B adalah 625 maka banyaknya anggota himpunan B adalah ....
   a. 2 c. 4
   b. 3 d. 5

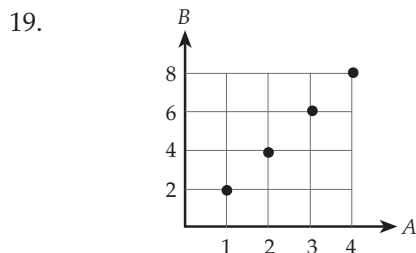
14. Notasi suatu fungsi $f : x \to ax + b$
   Jika $f : 0 \to 3$ dan $f : 2 \to 7$ maka bayangan dari $x = -2$ adalah ....
   a. –3 c. 1
   b. –1 d. 7

15. Jika $f(x) = 2x - 2$ maka nilai $f(5)$ = ...
   a. 7 c. 9
   b. 8 d. 10

16. Diketahui $f(x) = \frac{4x + 2}{6}$. Jika $f(a) = -3$ maka nilai a adalah ....
   a. –10 c. 5
   b. –5 d. 10

17. Sebuah fungsi dinyatakan sebagai $f(x) = ax + b$. Jika $f(5) = 25$ dan $f(4) = -11$ maka nilai dari $f(2) - f(5)$ adalah ....
   a. –58 c. 58
   b. –108 d. 108

18.

   Notasi fungsi dari gambar di atas adalah ....
   a. $f : x \to 3x + 1$ c. $f : x \to x^3$
   b. $f : x \to 3x^2 + 1$ d. $f : x \to (x + 1)^3$

19.

   Relasi dari A ke B yang mungkin adalah ....
   a. setengah dari
   b. dua kali dari
   c. tiga kali dari
   d. sepertiga dari

20. Notasi fungsi yang mungkin dari pasangan berurutan{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)} adalah ....
   a. $f : x \to x + 4$
   b. $f : x \to -x + 6$
   c. $f : x \to 2x + 3$
   d. $f : x \to \frac{1}{2}x + 1$

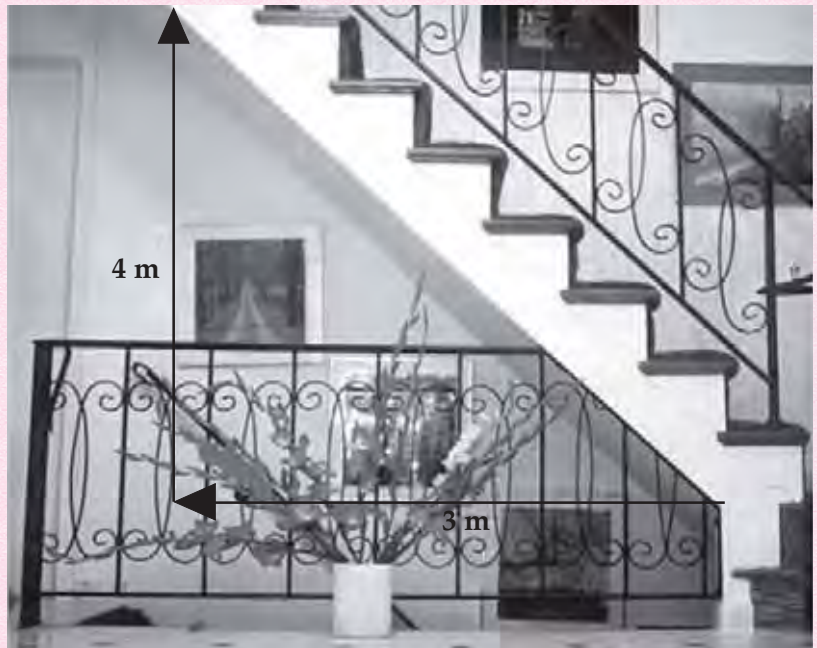
B Esai

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini.

1. Suatu pemetaan f atau fungsi f dari himpunan $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ke himpunan D = {bilangan cacah} ditentukan dengan aturan $f(x) = x + 3$. Nyatakan pemetaan di atas dengan:
   a. diagram panah;
   b. himpunan pasangan berurutan;
   c. diagram Cartesius.
2. Suatu fungsi didefinisikan oleh $f(x) = 3^{x-1}$. Tentukanlah:
   a. nilai a jika $f(a) = 81$;
   b. nilai x jika $f(2x + 1) = f(x - 2)$.
3. Diketahui $f(x) = 2x - 5$
   a. Tentukan bayangan dari 5, –2, dan $\frac{3}{4}$.
   b. Tentukan pembuat nol fungsi.
   c. Jika $f(a) = 10$, hitunglah a.
4. Diketahui $f(x) = 4x - 2$
   $g(x) = 5x - 4$
   $h(x) = 6x^2 - 2x$
   Hitunglah:
   a. $2f(6) - 3g(8)$
   b $4g(9) - 5h(6)$
5. Jika $f(2x - 2) = 2x + 2$ tentukanlah:
   a. rumus fungsi $f(x)$;
   b. nilai $f(-3) - 4f(3)$;
   c. nilai a jika $f(2a) = 8$.
6. Dari himpunan pasangan berurutan berikut manakah yang merupakan fungsi?
   a. {(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7)}
   b. {(5, 3), (6, 4), (7, 5), (8, 6), (9, 7)}
   c. {(4, 3), (5, 6), (7, 8), (9, 10), (11, 12)}
   d. {(12, 17), (13, 2), (12, 3), (13, 3), (14, 5)}
   e. {(1, 3), (2, 3), (3, 4), (5, 6), (7, 8)}
7. Fungsi f dinyatakan dengan rumus $f(x) = ax + b$. Jika $f(2) = 7$ dan $f(4) = 9$, hitunglah nilai a dan b.
8. Untuk fungsi $g(x) = 14 - 2x$, hitunglah x jika:
   a. $g(x) = -2$
   b. $g(x) = 10$
   c. $g(x) = 2 + a$
9. Untuk $h : x \to \frac{1}{4}(x + 2)$, hitunglah:
   a. $h(-2)$, $h(0)$, $h(18)$
   b. x, jika $h(x) = 6$
10. Diketahui $p : x \to 2x + 1$
    a. Jika domain = $\{-3 < x < 3, x \in R\}$, buatlah tabel daftar pemetaan.
    b. Tentukanlah rangenya.
    c. Gambarlah grafiknya.

BAB 3

Persamaan Garis Lurus

Sumber: www.google.com

Tujuan Pembelajaran

- Memahami bentuk-bentuk persamaan garis lurus dan menggambarkannya pada diagram Cartesius
- Memahami konsep gradien suatu garis untuk mempelajari hubungan beberapa persamaan garis
- Menerapkan konsep persamaan garis lurus untuk menyelesaikan masalah sehari-hari.

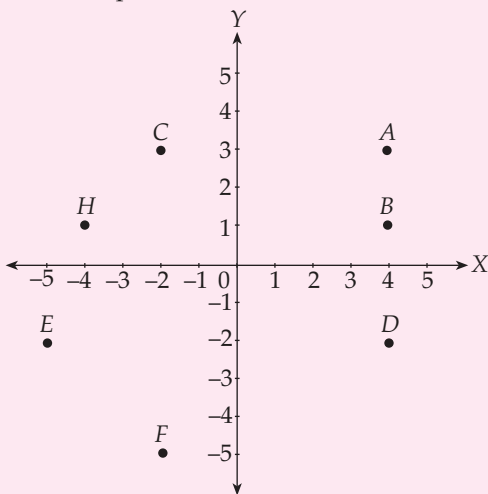
Masih ingatkah kalian dengan pengertian sistem koordinat Cartesius yang telah kalian pelajari di Sekolah Dasar?

Perlu diketahui bahwa di dalam pembahasan persamaan garis lurus kalian akan berhubungan dengan sistem koordinat Cartesius. Untuk itu, sebelum membicarakan tentang persamaan garis lurus terlebih dahulu kalian harus memahami pengertian sistem koordinat Cartesius. Penerapan konsep persamaan garis lurus pada kehidupan sehari-hari sangat banyak, salah satunya seperti terlihat pada gambar di atas.

Tangga yang sering kalian temui di kehidupan sehari-hari biasanya berbentuk garis lurus dan selalu diletakkan dengan posisi miring terhadap lantai. Tahukah kalian fungsi dari kemiringan pada tangga di atas? Dapatkah kalian menentukan gradien garis lurus dari tangga tersebut? Untuk mengetahui cara menentukannya, mari kita pelajari persamaan garis lurus pada bab ini.

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

Perhatikan titik-titik berikut. Dapatkah kalian menentukan koordinat dari titik-titik tersebut.

A Sifat-Sifat Persamaan Garis Lurus

Pada bab sebelumnya kalian telah belajar menggambar fungsi. Apa bentuk grafik dari suatu fungsi yang variabelnya berpangkat 1. Kalau kalian cermat bentuk grafiknya pasti berupa garis lurus. Pembahasan garis lurus ini akan dipelajari lebih lanjut. Untuk lebih jelasnya, perhatikan pembahasan berikut.

1 Persamaan Garis Lurus dalam Berbagai Bentuk dan Variabel

Masih ingatkah kalian dengan bentuk persamaan linear yang telah dipelajari di kelas VII? Cobalah kalian bandingkan dengan bentuk umum dari persamaan garis lurus yang diberikan berikut ini.

$y = mx + c$, dengan m = gradien dan c = konstanta

Menurut kalian, apakah bentuk umum dari persamaan garis lurus di atas merupakan persamaan linear? Coba kalian jawab dan berikan alasannya.

Persamaan garis lurus banyak diterapkan dalam bidang ilmu lain. Salah satunya adalah ilmu fisika. Beberapa perumusan fisika dinyatakan dalam bentuk persamaan garis lurus. Contohnya kecepatan yang dirumuskan dengan $v = v_o + at$, merupakan bentuk persamaan garis lurus. Hukum Ohm

Sumber: matematika dan komputer

Gambar 3.1 Lintasan kereta api dan mobil yang berbentuk garis lurus.

yang menyatakan hubungan antara tegangan (V) dan arus listrik (I) juga dinyatakan dalam bentuk persamaan garis lurus, yaitu $V = IR$. Cobalah kalian cari contoh penggunaan bentuk persamaan garis lurus yang lainnya.

2 Koordinat Cartesius

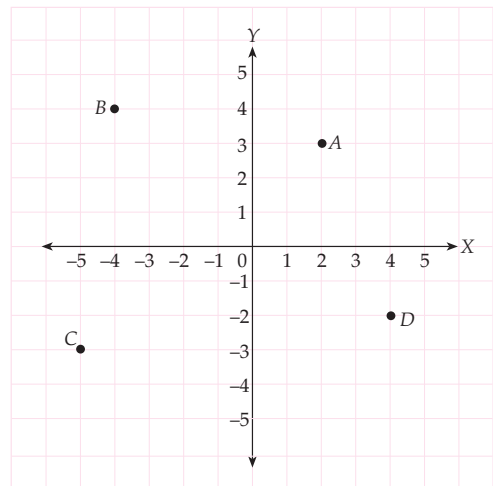
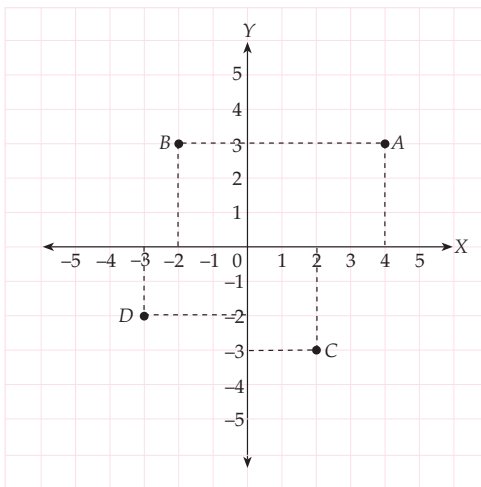
Untuk menggambar grafik persamaan garis lurus pada koordinat Cartesius, kalian perlu mengingat kembali pengertian *sistem koordinat Cartesius* dan cara menentukan *letak suatu titik* pada koordinat Cartesius. Untuk itu, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh SOAL

1. Nyatakanlah titik berikut pada sistem koordinat Cartesius.

   a. A (4, 3) c. C (2, –3)
   b. B (–2, 3) d. D (–3, –2)

   Penyelesaian:

2. Tentukanlah koordinat titik pada sistem koordinat di bawah ini.

   Penyelesaian:

   A (2, 3) C (–5, –3)
   B (–4, 4) D (4, –2)

3 Cara Menyusun Tabel Pasangan Berurutan dan Menggambar Grafik Persamaan Garis Lurus $y = mx$ dan $y = mx + c$

Untuk menggambar grafik dari suatu persamaan garis, ada baiknya dibuat dahulu tabel pasangannya. Dengan membuat tabel pasangan berurutan, kita akan lebih mudah menggambar grafik persamaan garis pada koordinat Cartesius.

Berikut langkah-langkah untuk menggambar grafik persamaan garis pada koordinat Cartesius.

1. Buatlah tabel pasangan untuk mempermudah menggambar grafik.
2. Tentukan minimal dua nilai x atau y pada tabel.
3. Substitusikan nilai-nilai x atau y tersebut pada persamaan garis yang akan digambar grafiknya sehingga didapat pasangan terurut (x, y) yang merupakan titik pada persamaan garis tersebut.
4. Gambarlah titik-titik yang didapat dari tabel pasangan berurutan. Garis yang menghubungkan titik-titik tersebut merupakan grafik persamaan garis yang akan digambar.

Untuk Diingat

Sebuah garis lurus dapat diperoleh dengan cara menghubungkan 2 titik sembarang. Itulah sebabnya untuk menggambar grafik dari sebuah garis lurus dibutuhkan minimal 2 titik dan panjang garis yang menghubungkan dua titik tersebut merupakan jarak antara 2 titik tersebut.

a. Garis $y = mx$

Untuk menggambar garis $y = mx$ pada bidang Cartesius perlu diperhatikan nilai x dan y pada garis $y = mx$. Garis $y = mx$ selalu melalui pusat koordinat (0, 0). Tahukah kalian alasannya? Untuk membuktikan bahwa garis $y = mx$ melalui koordinat (0, 0), perhatikanlah contoh berikut.

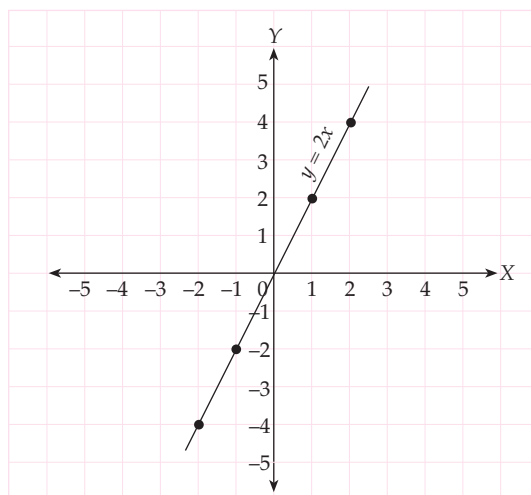
Contoh SOAL

Buatlah gambar garis dari persamaan $y = 2x$.

Penyelesaian:

Untuk membuat garis $y = 2x$ sebaiknya digunakan tabel dan nilai x pada tabel dapat ditentukan sendiri. Misalnya nilai x adalah {–2, –1, 0, 1, 2}.

Tabel Persamaan $y = 2x$

x	–2	–1	0	1	2
$y = 2x$	2(–2)	2(–1)	2(0)	2(1)	2(2)
(x,y)	(–2,–4)	(–1,–2)	(0,0)	(1,2)	(2,4)

b. Garis $y = mx + c$

Gambar garis $y = mx + c$ dapat dibuat dengan menggunakan cara yang sama seperti garis $y = mx$. Sebelum kalian membuat lukisan garis $y = mx + c$, tahukah kalian bahwa garis $y = mx + c$ tidak melalui pusat koordinat (0, 0) tetapi melalui $(0, c)$? Tahukah kalian alasannya? Untuk membuktikan gambar garis $y = mx + c$ melalui $(0, c)$, perhatikanlah contoh berikut ini.

Contoh SOAL

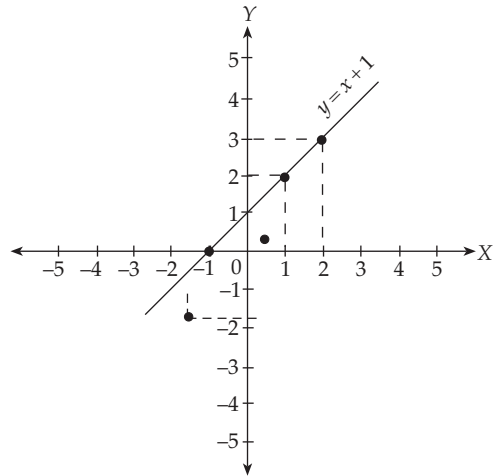
Gambarlah garis dari persamaan $y = x + 1$.

Penyelesaian:

Untuk menggambar garis $y = x + 1$, sebaiknya digunakan tabel pasangan dan pilihlah nilai x pada tabel yang tidak menghasilkan nilai y berbentuk pecahan. Misalnya nilai x adalah (–2, –1, 0, 1, 2).

Tabel Persamaan $y = x + 1$

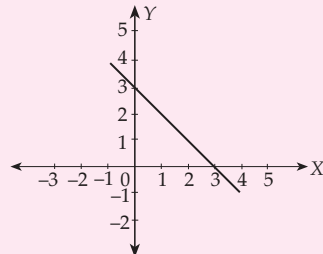
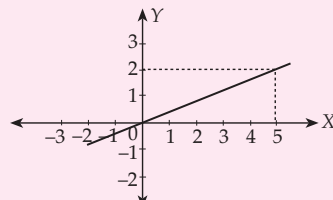
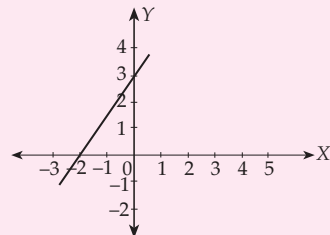
x	–2	–1	0	1	2
y	–1	0	1	2	3
(x,y)	(–2,–1)	(–1,0)	(0,1)	(1,2)	(2,3)

Coba kalian cari cara lain untuk menggambar grafik pada koordinat Cartesius.

LATIHAN 1

1. a. Nyatakanlah titik berikut pada diagram Cartesius.
   {(3, –5), (2, –3), (1, –1), (0, 1), (–1, 3), (–2, 5), (–3, 7)}.
   b. Apakah titik-titik tersebut membentuk aturan tertentu? Jika ya, tentukanlah aturannya.
2. a. Diketahui persamaan $y = 2x$.
   Lengkapilah tabel berikut.

x	–1	0	1
y			

   b. Nyatakanlah koordinat titik-titik (x, y) dalam tabel pada kertas berpetak.
   c. Dari gambar grafik, hitunglah :
   i) nilai y, jika $x = -3$ dan $x = 2,5$
   ii) nilai x, jika $y = -4$ dan $y = 6$
3. Dengan membuat tabel, gambarlah grafik dari persamaan berikut.
   a. $x + y = 1$
   b. $2x + y = 8$
   c. $3x - y - 6 = 0$
   d. $x + 3y - 6 = 0$
   e. $y = \frac{5}{2}x$
   f. $y = x + 3$
   g. $y = \frac{-5}{2}x$
   h. $2y - 3x = 6$
   i. $4y + 5x = 0$
   j. $y = \frac{1}{3}x - 3$
4. Tentukanlah persamaan garis berikut.

a.

b.

c.

4 Gradien

Apa yang dimaksud dengan gradien? Gradien suatu garis lurus adalah ukuran kemiringan (kecondongan) dari suatu garis lurus. Gradien suatu garis, biasanya dinotasikan dengan m. Gradien suatu garis dapat ditentukan melalui hubungan berikut.

$$\text{gradien garis} = \frac{\text{panjang komponen } y \text{ pada garis}}{\text{panjang komponen } x \text{ pada garis}}$$

Gambar 3.2 Tebing gunung yang memiliki kemiringan.

Gradien suatu garis memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

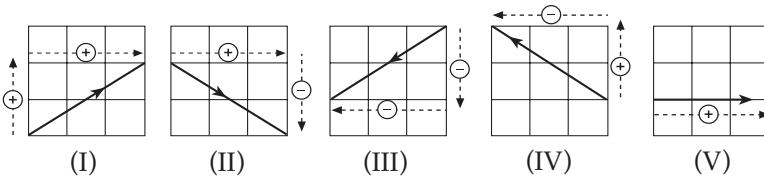
1. Garis yang memiliki kemiringan ke *kanan atas* atau ke *kiri bawah* gradiennya bernilai *positif*.
2. Garis yang memiliki kemiringan ke *kiri atas* atau ke *kanan bawah* gradiennya bernilai *negatif.*
3. Garis datar yang tidak memiliki kemiringan, gradiennya *nol* atau tak terdefinisikan.

Agar kamu lebih memahami cara menentukan gradien suatu garis, perhatikanlah uraian berikut.

Pada Gambar 3.3 ada beberapa hal yang harus diperhatikan.

Gambar 3.3 Gradien garis

Tanda komponen y bernilai ⊕ jika bergerak ke atas
⊖ jika bergerak ke bawah

Tanda komponen x bernilai ⊕ jika bergerak ke kanan
⊖ jika bergerak ke kiri

Dengan menggunakan aturan yang telah disebutkan di atas, kita dapat menentukan gradien dari masing-masing garis sebagai berikut.

Pada gambar (I) gradien garis adalah $\frac{2}{3}$

(II) gradien garis adalah $\frac{-2}{3}$ atau $-\frac{2}{3}$

(III) gradien garis adalah $\frac{-2}{-3}$ atau $\frac{2}{3}$

(IV) gradien garis adalah $\frac{2}{-3}$ atau $-\frac{2}{3}$

(V) gradien garis adalah $\frac{0}{3}$ atau 0

Sekarang, perhatikan kembali gambar garis dan gradiennya masing-masing. Adakah hubungan antara kemiringan garis dan nilai gradiennya? Kapan gradien suatu garis

Math Quiz

Jika gradien dari suatu garis lurus diperbesar atau diperkecil nilainya, perubahan apakah yang mungkin terjadi dari garis lurus tersebut? Hal apa yang dapat kamu simpulkan dari jawaban pertanyaan tersebut?

bernilai positif? Kapan bernilai negatif? Kapan bernilai nol? Diskusikanlah hal ini bersama temanmu.

Setelah mengetahui pengertian dan cara menentukan gradien suatu garis, selanjutnya kalian diharapkan dapat memahami *sifat gradien dari suatu garis lurus* serta *hubungan* antara *persamaan garis* dan *gradien* garisnya.

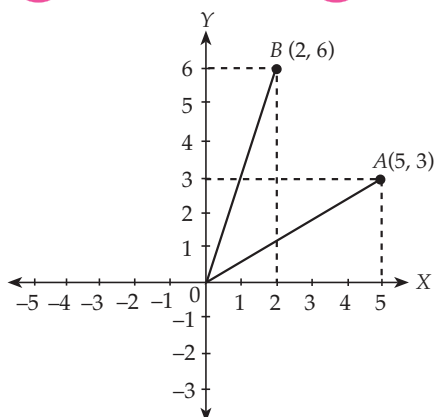
a. Gradien Garis yang Melalui (0,0) dan (x_1, y_1)

Gambar 3.4 Koordinat $P(x_1, y_1)$

Untuk menentukan gradien garis yang melalui (0, 0) dan (x_1, y_1) dapat ditentukan dengan hanya melihat koordinat (x_1, y_1). Untuk lebih jelasnya, perhatikanlah penjelasan Gambar 3.4 berikut ini.

Gradien dari garis l dapat dilihat pada Gambar 3.4, yaitu $\frac{y_1}{x_1}$. Secara umum dapat dikatakan gradien garis yang melalui (0, 0) dan (x_1, y_1) adalah $m = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0}$ maka $m = \frac{y_1}{x_1}$

Untuk membuktikan pernyataan di atas, pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh SOAL

Tentukan gradien dari garis-garis di samping.

Penyelesaian :

A (5 , 3) ⟶ $m_A = \frac{y_1}{x_1} = \frac{3}{5}$

(5 = x_1, 3 = y_1)

B (2 , 6) ⟶ $m_B = \frac{y_1}{x_1} = \frac{6}{2} = 3$

(2 = x_1, 6 = y_1)

b. Gradien Garis yang Melalui (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

Gambar 3.5 Koordinat titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$

Gradien garis yang melalui (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) pada prinsipnya sama dengan menentukan gradien umumnya, yaitu $\frac{\textit{Panjang komponen } y}{\textit{Panjang komponen } x}$.

Coba kalian amati Gambar 3.5.

gradien garis $AB = \frac{\textit{Panjang komponen } y \textit{ pada } AB}{\textit{Panjang komponen } x \textit{ pada } AB}$

sehingga $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Secara umum dapat dikatakan bahwa jika $A\ (x_1, y_1)$ dan $B\ (x_2, y_2)$ maka gradien garis AB dapat ditulis:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Untuk membuktikan pernyataan di atas, pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh SOAL

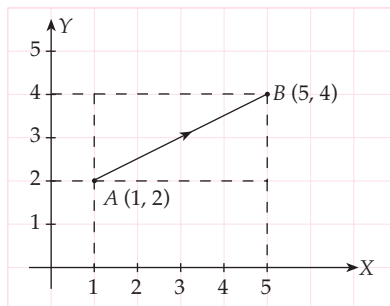
Tentukanlah gradien garis yang melalui titik $A\ (1, 2)$ dan $B\ (5, 4)$.

Penyelesaian:

$A\ (1, 2) \rightarrow A\ (x_1, y_1)$

$B\ (5, 4) \rightarrow B\ (x_2, y_2)$

Jadi, gradien garis $AB = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4 - 2}{5 - 1}$

$= \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

c. Gradien Garis yang Sejajar Sumbu-X

Untuk gradien garis yang sejajar sumbu-X mempunyai ketentuan tersendiri. Coba kalian amati Gambar 3.6. Garis l sejajar sumbu-X dengan $A\ (x_1, y_1)$ dan $B\ (x_2, y_1)$. Nilai ordinat A dan B adalah y_1, gradien garis l:

Gambar 3.6 Koordinat $A\ (x_1, y_1)$ dan $B\ (x_2, y_1)$

Gradien garis $l = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Gradien garis $l = \dfrac{0}{x_2 - x_1}$

Gradien garis l = 0 (karena 0 dibagi suatu bilangan hasilnya adalah 0)

Jadi, gradien garis yang sejajar sumbu-X adalah 0.

Untuk membuktikan pernyataan di atas, *ambillah sebuah garis lain yang sejajar sumbu-X dan hitunglah gradiennya.*

d. Gradien Garis yang Sejajar Sumbu-Y

Untuk gradien garis yang sejajar sumbu-Y mempunyai ketentuan tersendiri. Coba kalian amati Gambar 3.7. Garis k sejajar dengan sumbu-Y dengan $A\ (x_1, y_1)$ dan $B\ (x_1, y_2)$. Nilai absis A dan B adalah x_1.

Gambar 3.7 Koordinat $A\ (x_1, y_1)$ dan $B\ (x_1, y_2)$

Gradien garis $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1}$

Gradien garis $k = \dfrac{y_2 - y_1}{0}$

Gradien garis k = tidak dapat didefinisikan (karena suatu bilangan dibagi 0 hasilnya adalah tidak terdefinisi)

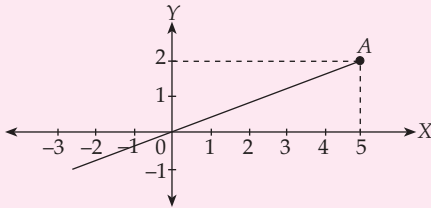
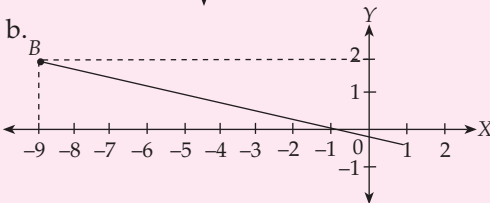
Jadi, gradien garis yang sejajar sumbu-Y tidak dapat didefinisikan.

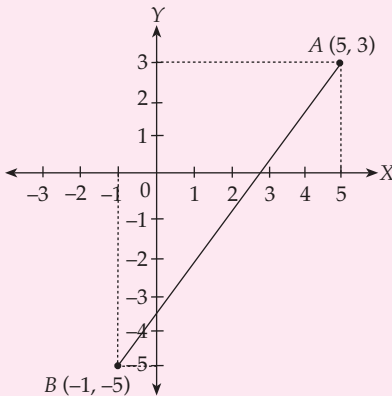
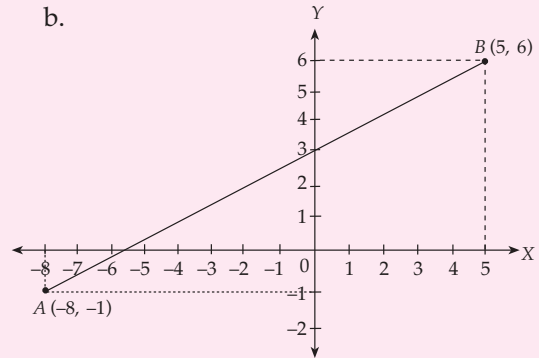
Untuk membuktikan *pernyataan* di atas, *ambillah sebuah garis lain yang sejajar sumbu-Y dan hitunglah gradiennya.*

LATIHAN 2

1. Tentukanlah gradien garis berikut.

   a.

   b.

B

2. Tentukan gradien garis berikut ini.

   a.

   b.

4. Tentukanlah gradien garis yang melalui pasangan titik berikut. Manakah di antara garis tersebut yang sejajar sumbu-X dan sejajar sumbu-Y?
   a. (0, 0) dan (–3, 4)
   b. (6, –8) dan (0, 0)
   c. (2, –5) dan (5, –1)
   d. (0, 0) dan (–6, –8)
   e. (2, 3) dan (9, 27)
   f. (2, 6) dan (3, 6)
5. Mengapa garis yang sejajar sumbu-Y bukan merupakan fungsi? Berikan alasanmu.

e. Gradien Dua Garis yang Sejajar

Gambar 3.8 Garis k sejajar garis l

Untuk mengetahui sifat gradien dua garis yang sejajar, amatilah Gambar 3.8. Garis k dan l mempunyai gradien tertentu.

Gradien garis k adalah $m_k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Gradien garis l adalah $m_l = \frac{3}{2}$

Jadi, gradien kedua garis adalah sama.

Jika garis k di geser ke arah garis l maka garis k dapat tepat berimpit dengan garis l sehingga dikatakan garis k sejajar garis l.

Dua garis dikatakan sejajar jika kedua gradiennya sama.

Jika dua garis sejajar maka: $m_1 = m_2$

Untuk membuktikan pernyataan di atas, *ambillah dua buah garis yang sejajar dan hitunglah gradien kedua garis yang diambil*.

f. Gradien Dua Garis yang Saling Tegak Lurus

Untuk mengetahui sifat gradien dari dua garis yang saling tegak lurus, amatilah Gambar 3.9. Garis a dan b adalah dua garis yang saling tegak lurus.

Gambar 3.9 Garis *a* tegak lurus garis *b*

Gradien garis $a = \dfrac{4-0}{0-(-6)}$ $\qquad m_a = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Gradien garis $b = \dfrac{6-0}{0-4}$ $\qquad m_b = \dfrac{6}{-4} = -\dfrac{3}{2}$

$$m_a \times m_b = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$m_a \times m_b = -1$$

Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa

Dua garis saling tegak lurus jika hasil kali gradien kedua garis itu adalah –1

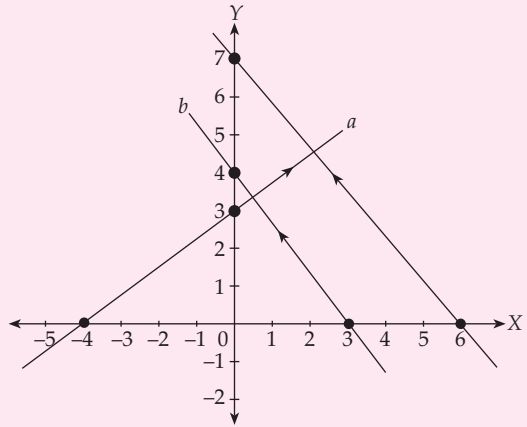
Jika dua garis saling tegak lurus maka:

$$m_1 \times m_2 = -1$$

Untuk membuktikan pernyataan di atas, *ambillah dua buah garis yang lain dan saling tegak lurus. Kemudian, hitunglah gradien kedua garis yang diambil tadi.*

LATIHAN 3

1. Tentukanlah pasangan garis di bawah ini yang saling sejajar.
   a. $3y = -5x + 6$
   b. $6y = -3x - 2$
   c. $7x - 3y - 4 = 0$
   d. $-2y + 3x - 6 = 0$
   e. $5x + 3y - 6 = 0$
   f. $-2y = 3x + 2$
2. Tentukanlah pasangan garis di bawah ini yang saling tegak lurus.
   a. $3y = 2x - 2$
   b. $5y = -3x + 2$
   c. $2y = 5x + 2$
   d. $2y + 3x - 2 = 0$
   e. $2x + 5y - 8 = 0$
   f. $2y + x - 3 = 0$
3. Tentukanlah gradien garis yang sejajar dengan garis-garis berikut.
   a. $2y = 3x + 2$
   b. $2y - 3x - 6 = 0$
   c. $4y = \frac{4}{5}x - 2$
   d. $5y = \frac{2}{3}x + 3$
   e. $8x = 2y - 3$
   f. $9x - 8y - 4 = 0$

4. Tentukanlah gradien garis yang tegak lurus dengan garis-garis berikut.
   a. $2y = 5x - 2$
   b. $3y = 7x + 3$
   c. $2y - 3x - 2 = 0$
   d. $6x - 3y - 2 = 0$
   e. $2x + 2y - 2 = 0$
   f. $5x - 2y - 3 = 0$
5. a. Tentukanlah gradien garis a, b, dan c.
   b. Apakah garis a tegak lurus garis b?
   c. Apakah garis b tegak lurus garis c?
   d. Apakah garis a tegak lurus garis c?

Kerjakan bersama teman sebangkumu.
Dua buah kereta api berjalan pada sebuah rel yang lurus dan dinyatakan dengan persamaan $2y = 4x - 6$ dan $x + 2y + 4 = 0$. Apakah kedua kereta api itu berjalan pada rel kereta yang sejajar? Selidiki bagaimana caranya agar kedua kereta api itu tidak saling bertabrakan.

5 Menentukan Gradien dari Persamaan Garis Lurus

Pada subbab sebelumnya, kita telah membahas bentuk umum persamaan garis lurus, yaitu $y = mx + c$, dengan m adalah gradien. Untuk menentukan gradien dari bentuk $y = mx + c$, berarti dapat langsung ditentukan dengan melihat nilai m pada $y = mx + c$. Untuk membuktikannya, pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh SOAL

1. Tentukanlah gradien garis berikut.
   a. $y = 2x + 3$
   b. $3y = 4x - 5$
   c. $2y = 5x + 6$

   Penyelesaian:

   Bentuk umum persaman garis adalah $y = mx + c$
   a. $y = 2x + 3$, jadi gradien garis = 2
   b. $3y = 4x - 5$ dibuat menjadi bentuk $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$, jadi gradien garis = $\frac{4}{3}$
   c. $2y = 5x + 6$ dibuat menjadi bentuk $y = \frac{5}{2}x + \frac{6}{2}$, jadi gradien garis = $\frac{5}{2}$

2. Tentukanlah gradien garis dari persamaan $4y + 3x + 7 = 0$

   Penyelesaian:

   $4y + 3x + 7 = 0$
   $4y = -3x - 7$ ⇐ (ubah ke bentuk $y = mx + c$)
   $\frac{4y}{4} = \frac{-3x - 7}{4}$ ⇐ (kedua ruas dikali $\frac{1}{4}$)
   $y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$ ⇐ $m = -\frac{3}{4}$

   Jadi, gradien $4y + 3x + 7 = 0$ adalah $-\frac{3}{4}$.

Dari contoh soal tersebut, apa yang dapat kalian simpulkan? Berapa gradien garis $ay + bx + c = 0$?

LATIHAN 4

1. Tentukanlah gradien garis berikut.
   a. $y = \frac{-7}{3}x$
   b. $-y = 2x + 5$
   c. $x + y = 3$
   d. $-3x - y = 3$
   e. $4 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}y = 0$
   f. $-2x = ay - 3$
   g. $-5x = 2ay - 4$
   h. $-4x = (3a + 1)y - 2$
2. Tentukan gradien dari persamaan berikut.
   a. $\frac{2x + y}{3} = 5$
   b. $\frac{5x - 2y}{3} = 2$
   c. $6x = \frac{3y + 4}{2}$
   d. $\frac{2y - 5}{2} - x = 0$
   e. $\frac{3y - 5}{6} = 3x$
   f. $3x = \frac{4y - 6}{2}$
3. Nyatakanlah bentuk berikut menjadi bentuk $y = mx + c$ dan tentukanlah gradiennya.
   a. $\frac{2ax + y}{2} = 5$
   b. $\frac{3ax - y}{3} = 4$
   c. $\frac{6 - 3y}{4x} = 3$
   d. $\frac{5 - 2x}{3} = 2y$
   e. $\frac{4y - 3}{2x + 3} = 5$

B Persamaan Garis dan Koordinat Titik Potong Dua Garis

Setelah kita mengetahui cara menentukan gradien suatu garis, sekarang kalian akan dikenalkan dengan cara menentukan persamaan suatu garis. Untuk itu, coba kalian perhatikan baik-baik penjelasan berikut ini.

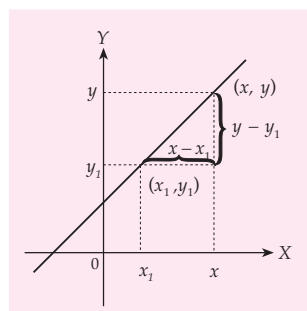
1 Persamaan Garis dengan Gradien m dan Melalui (x_1, y_1)

Gambar 3.10 menunjukkan sebuah garis lurus dengan gradien m dan melalui titik (x_1, y_1). Untuk menentukan persamaan garisnya, tentukanlah sembarang titik (x, y) yang terletak pada garis tersebut. Melalui kedua titik itu, gradien garisnya dapat ditentukan sebagai berikut.

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Bentuk aljabar di atas dapat diubah menjadi seperti berikut.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Bentuk inilah yang merupakan persamaan garis lurus dengan gradien m dan melewati titik (x_1, y_1). Untuk lebih memahami penggunaan rumus di atas, pelajarilah contoh soal berikut.

Gambar 3.10 Garis dengan gradien m dan melalui (x_1, y_1)

Contoh SOAL

Tentukanlah persamaan garis yang melalui P (3, –6) dengan gradien 5.

Penyelesaian:

P (3, –6) dan gradien 5 disubstitusikan ke $y - y_1 = m(x - x_1)$ diperoleh

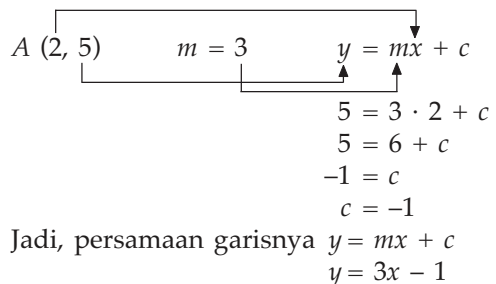
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-6) = 5\ (x - 3)$$
$$y + 6 = 5x - 15$$
$$y = 5x - 15 - 6$$
$$y = 5x - 21$$

Bentuk persamaan garis lurus di atas dapat disederhanakan menjadi seperti berikut.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y = mx + y_1 - mx_1$$

Perhatikan bahwa y_1, m, dan x_1 merupakan suatu bilangan (konstanta). Dengan demikian, nilai $y_1 - mx_1$ dapat digantikan dengan konstanta (c).

$$y = mx + c$$

Bentuk persamaan $y = mx + c$ juga dapat digunakan untuk mencari persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dengan gradien m. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh SOAL

Tentukanlah persamaan garis yang melalui A (2, 5) dengan gradien 3.

Penyelesaian:

Bentuk umum persamaan garis $y = mx + c$

A (2, 5) dan gradien 3 disubstitusi ke persamaan $y = mx + c$ sebagai berikut.

A (2, 5) $\quad m = 3 \quad y = mx + c$

$$5 = 3 \cdot 2 + c$$
$$5 = 6 + c$$
$$-1 = c$$
$$c = -1$$

Jadi, persamaan garisnya $y = mx + c$

$y = 3x - 1$

LATIHAN 5

1. Tentukanlah persamaan garis yang melalui (2, –6) dengan gradien:
   a. 3   c. –2   e. $-\frac{9}{7}$
   b. 4   d. $\frac{5}{2}$ f. $-\frac{7}{5}$
2. Tentukanlah persamaan garis yang gradiennya $-\frac{3}{2}$ dan melalui:
   a. (2, 5)   b. (–3, 6)   c. (4, –6)
3. Diketahui garis melalui (2, 6) dengan gradien 4. Apakah titik (–5, –22) terletak pada garis tersebut?
4. Diketahui garis dengan gradien –6 dan melalui (–4, –8). Apakah titik (22, –38) terletak pada garis tersebut?
5. Tentukanlah persamaan garis yang melalui titik (–2, 8) dan sejajar dengan garis $y = 2x$.

2 Persamaan Garis yang Melalui Titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$

Bagaimana menentukan persamaan garis yang melalui dua titik? *Cobalah baca buku-buku lain sebelum kalian memahami penjelasan berikut. Setelah itu coba kalian pahami penjelasan berikut.*

Untuk menentukan persamaan garis yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dapat ditentukan dengan menentukan gradiennya terlebih dahulu, kemudian menggunakan aturan ke $y - y_1 = m(x - x_1)$. Jika gradien AB disubstitusikan ke m pada persamaan $y - y_1 = m(x - x_1)$ maka didapat persamaan

$$y - y_1 = m(x - x_1)\ ; \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Persamaan di atas dapat ditulis:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Inilah rumus persamaan garis yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$.

Agar kalian mudah menggunakan rumus di atas, pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh SOAL

1. Tentukanlah persamaan garis yang melalui $A(2, 5)$ dan $B(5, 9)$.

   Penyelesaian:

   $A(2, 5)$ dan $B(5, 9)$, dengan $x_1 = 2$, $y_1 = 5$, $x_2 = 5$, $y_2 = 9$

   Gradien $AB = m_{AB} = \frac{9 - 5}{5 - 2} = \frac{4}{3}$

   Substitusi m_{AB} ke $y - y_1 = m(x - x_1)$ dengan (x_1, y_1) dapat dipilih A atau B. Misal dipilih $A(2, 5)$, maka

   $$y - 5 = \frac{4}{3}(x - 2)$$
   $$y - 5 = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$$
   $$y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + 5$$
   $$y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

2. Tentukanlah persamaan garis yang melalui $A(2, 5)$ dan $B(9, 16)$.

   Penyelesaian:

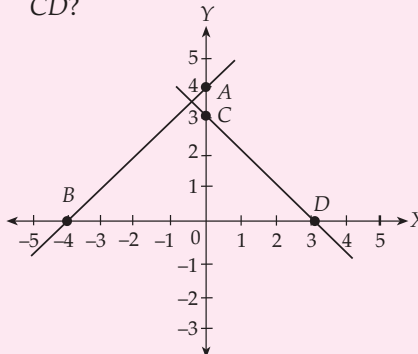
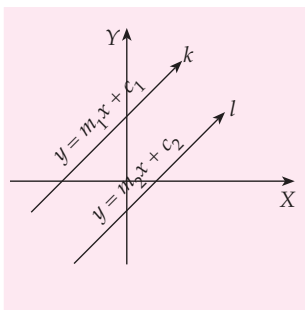
   $A(2, 5)$ dan $B(9, 16)$, dengan $x_1 = 2$, $y_1 = 5$, $x_2 = 9$, $y_2 = 16$

   Nilai (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) disubstitusi ke

   $$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$
   $$\frac{y - 5}{16 - 5} = \frac{x - 2}{9 - 2}$$
   $$\frac{y - 5}{11} = \frac{x - 2}{7}$$
   $$7(y - 5) = 11(x - 2)$$
   $$7y - 35 = 11x - 22$$
   $$7y = 11x - 22 + 35$$
   $$7y = 11x + 13$$

   Jadi, persamaan garisnya $7y = 11x + 13$.

LATIHAN 6

1. Tentukanlah gradien garis yang melalui:
   a. (2, 5) dan (3, 9)
   b. (–3, –5) dan (–2, –9)
   c. (–4, –8) dan (6, –2)
   d. (–5, 12) dan (–7, 24)
2. Diketahui titik A (–2, 5), B (–1, 6), dan C (0, 7).
   a. Lukislah titik-titik tersebut pada grafik Cartesius.
   b. Apakah titik A, B, dan C terletak pada satu garis lurus?
3. Perhatikan gambar di samping.
   a. Tentukanlah persamaan garis AB.
   b. Tentukanlah persamaan garis CD.
   c. Apakah titik (–3, 1) terletak pada garis AB?
   d. Apakah titik (2, 2) terletak pada garis CD?
   e. apakah titik (1, 2) terletak pada garis CD?

3 Persamaan Garis yang Melalui (x_1, y_1) dan Sejajar Garis $y = mx + c$

Gambar 3.11 Dua garis sejajar, $m_1 = m_2$

Pada subbab terdahulu telah dijelaskan bahwa dua garis sejajar memiliki nilai gradien yang sama. Gambar 3.11 memperlihatkan dua garis dengan persamaan $y = m_1x + c_1$ dan $y = m_2x + c_2$. Apabila kedua garis itu sejajar maka $m_1 = m_2$.

Misalkan kita ingin menentukan persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan sejajar dengan garis k. Persamaan garis yang ingin kita cari pasti memiliki gradien yang sama dengan garis k, yaitu m_1 karena kedua garis sejajar. Dengan demikian, kita dapat sebuah titik (x_1, y_1) dan gradien m_1. Melalui sebuah titik dan gradien, kita dapat menentukan persamaan garisnya dengan menggunakan persamaan yang telah dijelaskan sebelumnya. Untuk lebih jelasnya, perhatikanlah contoh soal berikut.

Contoh SOAL

Tentukanlah persamaan garis yang melalui A (3, 4) dan sejajar garis $y = 3x + 5$.

Penyelesaian:

Gradien garis $y = 3x + 5$ dinamakan m_1, maka $m_1 = 3$

Gradien garis yang sejajar $y = 3x + 5$, dinamakan m_2, sehingga

$$m_2 = m_1 = 3$$

A (3, 4) dan $m_2 = 3$ disubstitusikan ke $y = mx + c$ atau $y - y_1 = m(x - x_1)$, didapat

Cara I

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ 4 &= 3 \times 3 + c \\ 4 &= 9 + c \\ 4 - 9 &= c \\ -5 &= c \\ y &= mx + c \\ y &= 3x - 5 \end{aligned}$$

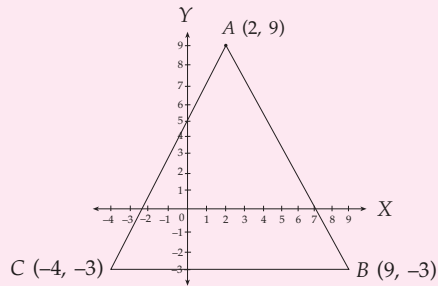
Cara II

$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 4 = 3(x - 3)$
$y - 4 = 3x - 9$
$y = 3x - 9 + 4$
$y = 3x - 5$

Jadi, persamaan garis yang melalui A (3, 4) dan sejajar garis $y = 3x + 5$ adalah $y = 3x - 5$.

Manakah di antara kedua cara tersebut yang paling mudah digunakan dan diingat? Berikan alasanmu.

LATIHAN 7

1. Tentukanlah gradien dari persamaan garis berikut ini.
   a. $2x + 3y - 2 = 0$
   b. $4x - y - 3 = 0$
   c. $2x + 3 = 5y$
   d. $3x - 2 = 2y$
   e. $3x + y = 9y$
   f. $2x - y = 8$
2. Tentukanlah persamaan garis yang melalui:
   a. (2, 5) dengan gradien 4
   b. (–2, 7) dengan gradien $-\frac{2}{3}$
   c. (–2, –7) dengan gradien –3
3. Tentukanlah persamaan garis yang melalui (2, –7) dan sejajar garis $y = 3x + 2$.
4.

   a. Tentukanlah persamaan garis yang melalui C dan sejajar AB.
   b. Tentukanlah persamaan garis yang melalui A dan sejajar BC.

4 Persamaan Garis yang Melalui (x_1, y_1) dan Tegak Lurus Garis $y = mx + c$

Pada subbab sebelumnya telah dijelaskan bahwa dua garis akan saling tegak lurus apabila perkalian gradiennya sama dengan –1. Gambar 3.12 memperlihatkan dua garis dengan persamaan $y = m_1x + c_1$ dan $y = m_2x + c_2$. Apabila kedua garis tersebut saling tegak lurus maka memenuhi hubungan berikut.

$$m_1 \times m_2 = -1$$

Gambar 3.12 Dua garis saling tegak lurus, $m_1 \times m_2 = -1$

Misalkan kita ingin mencari persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan tegak lurus garis k. Persamaan garis yang akan kita cari pasti memiliki gradien $-\frac{1}{m_1}$. Dengan demikian, kita dapati sebuah titik (x_1, y_1) dan gradien $-\frac{1}{m_1}$. Melalui sebuah titik (x_1, y_1) dan gradien $-\frac{1}{m_1}$ kita dapat menentukan persamaan garisnya menggunakan perumusan yang telah dijelaskan sebelumnya. Untuk lebih jelasnya, perhatikanlah contoh soal berikut.

Contoh SOAL

Tentukanlah persamaan garis yang melalui (2, 3) dan tegak lurus $y = 2x + 5$.

Penyelesaian:

Gradien $y = 2x + 5$ adalah $m_1 = 2$.

Gradien garis yang tegak lurus $y = 2x + 5$ adalah m_2, maka

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad m_2 \times m_1 = -1,\ m_2 \times 2 = -1,\ m_2 = -\frac{1}{2}$$

titik (2, 3) dan $m_2 = -\frac{1}{2}$ disubstitusikan ke $y = mx + c$ atau $y - y_1 = m\,(x - x_1)$, didapat

Cara I

$$\begin{aligned} y &= m_2x + c \\ 3 &= -\frac{1}{2} \times 2 + c \\ 3 &= -1 + c \\ 4 &= c \\ y &= mx + c \\ y &= -\frac{1}{2}x + 4 \text{ atau} \end{aligned}$$

Cara II

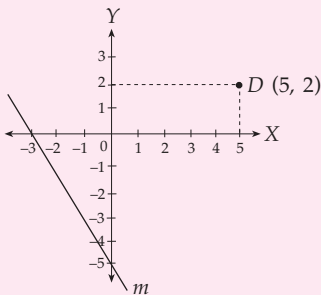
$$\begin{aligned} y - y_1 &= m_2\,(x - x_1) \\ y - 3 &= -\frac{1}{2}\,(x - 2) \\ y - 3 &= -\frac{1}{2}x + 1 \\ y &= -\frac{1}{2}x + 4 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis yang melalui (2, 3) dan tegak lurus $y = 2x + 5$ adalah $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Coba kalian cari cara lain yang lebih mudah untuk menyelesaikan contoh soal di atas.

LATIHAN 8

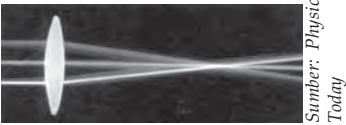
1. Tentukanlah gradien garis berikut:
   a. $3x + 2y - 5 = 0$
   b. $5x - 3y - 6 = 0$
   c. $4x - 5y + 2 = 0$
   d. $2y = 4x - 2$
   e. $3x = 5x + 3$
   f. $4x = 7y - 2$
2. Tentukanlah persamaan garis yang melalui D (5, 2) dan tegak lurus garis m.

3. Tentukanlah persamaan garis yang melalui (9, –6) dan tegak lurus garis $2x + 3y - 5 = 0$
4. Tentukanlah persamaan garis yang melalui (–2, –8) dan tegak lurus garis $4x - 3y - 6 = 0$
5. Tentukanlah persamaan garis yang bergradien:
   a. –2 dan melalui (–3, 9)
   b. –4 dan melalui (8, –9)
   c. $\frac{5}{3}$ dan melalui (–3, 8)
   d. $\frac{7}{3}$ dan melalui (9, –4)

5 Koordinat Titik Potong Dua Garis

Kedudukan dari dua garis pada bidang Cartesius ada tiga kemungkinan, yaitu sejajar, berpotongan atau berimpit. Jika dua garis saling berpotongan maka pasti mempunyai sebuah

titik potong. Koordinat titik potong dari dua garis lurus dapat ditentukan dengan menggambar grafik dari kedua garis yang berpotongan. Untuk lebih jelasnya coba kalian perhatikan penjelasan contoh soal berikut ini.

Apakah syarat dua garis dapat saling berpotongan? Jelaskanlah.

Sumber: Physics Today

Gambar 3.13 Dua sinar berbentuk garis lurus yang saling berpotongan.

Contoh SOAL

Tentukanlah koordinat titik potong dari garis $-x - y = 5$ dan $x - 2y = 4$

Penyelesaian:

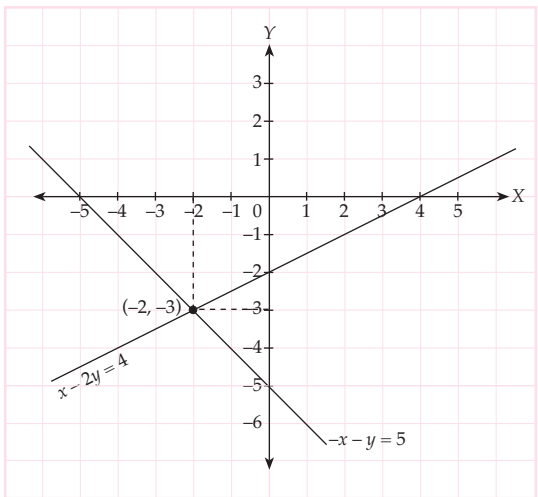
Untuk menentukan titik potong kedua garis di atas, kita tentukan terlebih dahulu tabel pasangan dari kedua garis tersebut.

Tabel persamaan $-x - y = 5$

x	y	(x, y)
0	–5	(0, –5)
–5	0	(–5, 0)

Tabel persamaan $x - 2y = 4$

x	y	(x, y)
0	–2	(0, –2)
4	0	(4, 0)

Gambarlah titik-titik yang didapat dari masing-masing tabel pasangan garis dan hubungkan menjadi dua buah garis yang saling berpotongan seperti di bawah ini.

Kalau kita perhatikan dari gambar grafik di atas, terlihat titik potong dari garis $-x - y = 5$ dan $x - 2y = 4$ adalah (–2, –3). Jadi, titik potong dari garis $-x - y = 5$ dan $x - 2y = 4$ adalah (–2, –3).

Selain dengan menggunakan grafik dari kedua garis yang berpotongan, kita juga dapat menentukan koordinat titik potong dari garis $-x - y = 5$ dan $x - 2y = 4$ dengan cara substitusi sebagai berikut.

Ubahlah salah satu persamaan di bawah ini sehingga ruas kiri dari salah satu persamaan itu hanya berisi satu variabel.

$-x - y = 5$ .... (1)

$x - 2y = 4 \Leftrightarrow x = 2y + 4$ .... (2)

Substitusikan persamaan (2) ke persamaan (1) sehingga diperoleh

$$-(2y + 4) - y = 5$$
$$-2y - 4 - y = 5$$
$$-3y = 9$$
$$y = -3$$

Substitusikan $y = -3$ ke persamaan (2), sehingga diperoleh

$$-x - (-3) = 5$$
$$-x + 3 = 5$$
$$x = 3 - 5$$
$$x = -2$$

Jadi, titik potong dari garis $-x - y = 5$ dan $x - 2y = 4$ adalah (–2, –3).

Selanjutnya, *dapatkah kalian menemukan cara lain untuk menentukan koordinat titik potong dari dua garis? Diskusikanlah dengan teman-temanmu.*

LATIHAN 9

1. Tentukanlah koordinat titik potong dari persamaan garis berikut.
   a. $x + y = 16$ dan $x - y = 0$
   b. $2x + y = 23$ dan $4x - y = 19$
   c. $3x - 2y = 6$ dan $6y = 5y + 30$
   d. $2x - 3y = 5$ dan $3x - \frac{2y - 3}{5} = 4$
   e. $\frac{5x}{3} + \frac{7y}{9} = 2$ dan $3x - y = 3$
2. Sebuah garis $2x - y = 4$ tegak lurus pada garis g. Garis g melalui titik (2, 4). Tentukanlah:
   a. persamaan garis g;
   b. titik potong garis g dengan garis $2x - y = 4$.
3. Sebuah garis $3x - y = 6$ berpotongan dengan garis h yang melalui titik (2, 8) dan bergradien 2. Tentukanlah:
   a. persamaan dari garis h;
   b. koordinat titik potong garis h dengan garis $3x - y = 6$.
4. Tiga buah titik berikut membentuk sebuah segitiga A (2, 1), B (5, 1), dan C (4, 4). Tentukanlah:
   a. koordinat titik potong AB dengan garis AC;
   b. koodinat titik potong AB dengan garis BC;
   c. luas segitiga tersebut.

C Aplikasi Persamaan Garis Lurus dalam Kehidupan

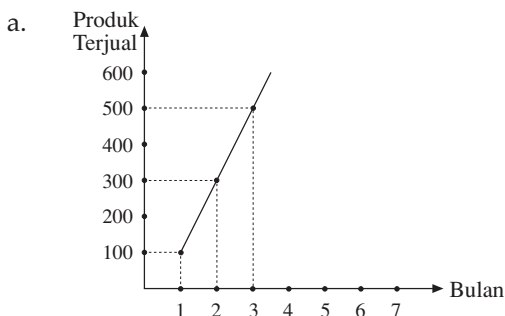
Persamaan garis lurus banyak digunakan untuk membantu memecahkan masalah sehari-hari. Contohnya dalam memprediksikan jumlah penjualan dalam jangka waktu tertentu. Agar kalian lebih jelas, coba kalian perhatikan contoh soal berikut.

Contoh SOAL

Sebuah produk pada bulan pertama terjual 100 buah, bulan kedua 300 buah, bulan ketiga 500 buah. Tentukanlah:

a. persamaan garis yang dapat dibentuk dari data penjualan produk;
b. jumlah produk yang diharapkan akan terjual pada bulan keempat.

Penyelesaian:

a.

Pada diagram Cartesius di atas, terlihat hasil penjualan tiap bulan dari produk buah. Hasil penjualan ini dapat dinyatakan dengan pasangan berurutan, yaitu (1, 100), (2, 300) dan (3, 500). Dari pasangan berurutan itu dapat ditentukan persamaan garisnya sebagai berikut.

Misalkan:
bulan = x dan jumlah produk terjual = y, maka diperoleh

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 100}{300 - 100} = \frac{x - 1}{2 - 1}$$

$$\frac{y - 100}{200} = \frac{x - 1}{1}$$

$$y - 100 = 200(x - 1)$$
$$y - 100 = 200x - 200$$
$$y = 200x - 100$$

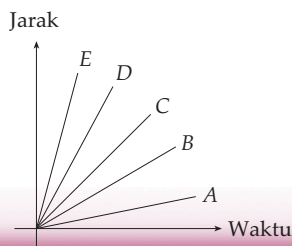
Jadi, jumlah produk (y) yang terjual pada bulan ke-x adalah $y = 200x - 100$.

b. Jumlah produk yang terjual pada bulan keempat, berarti $x = 4$. Subtitusikan $x = 4$ ke persamaan $y = 200x - 100$, diperoleh

$$y = 200x - 100$$
$$= 200(4) - 100$$
$$= 700$$

Jadi, jumlah produk yang diharapkan akan terjual pada bulan keempat adalah 700 buah.

Soal-Soal Kontekstual

1. Jika harga sebuah jeruk Rp800,00 dan harga dua buah jeruk Rp1.500,00, tentukanlah:
   a. persamaan garis yang dapat dibentuk dari data harga jeruk;
   b. harga dari 12 buah jeruk.
2. Seorang petani mampu memanen 50 jagung pada bulan pertama. Pada bulan kedua ia memanen 80 jagung. Tentukanlah:
   a. grafik persamaan garis yang dibentuk dari hasil panen pak tani tersebut;
   b. gradien dari persamaan garis yang terbentuk;
   c. hasil jagung yang diperoleh petani pada bulan ketiga dan keempat.
3. Pada gambar di bawah diperlihatkan kecepatan 5 orang, yaitu A, B, C, D, dan E. Dengan menggunakan konsep gradien, siapakah yang tercepat dari kelima orang tersebut?

Tugas Siswa

Di sekolah tentunya kamu sering melakukan praktik lari setiap minggu di lapangan. Pilihlah 5 orang anak secara acak dari teman-temanmu, kemudian suruhlah satu per satu dari ke-5 anak tersebut untuk berlari mengelilingi lapangan.

a. Catatlah waktu yang dibutuhkan oleh setiap anak untuk mengelilingi lapangan tersebut dan ukurlah jarak lapangan itu.
b. Hitunglah kecepatan lari dari tiap anak berdasarkan data yang telah diperoleh pada bagian a, dengan menggunakan rumus kecepatan (v) = jarak tempuh (s) dibagi dengan waktu yang dibutuhkan (t).
c. Buatlah grafik persamaan kecepatan (v) terhadap waktu (t) dari tiap anak di dalam satu grafik.
d. Tentukanlah gradien dari tiap garis persamaan yang diperoleh pada soal c.
e. Jika terdapat perpotongan antara grafik persamaan yang diperoleh pada soal c, tentukanlah titik perpotongan dari grafik persamaan yang berpotongan tersebut.

RANGKUMAN

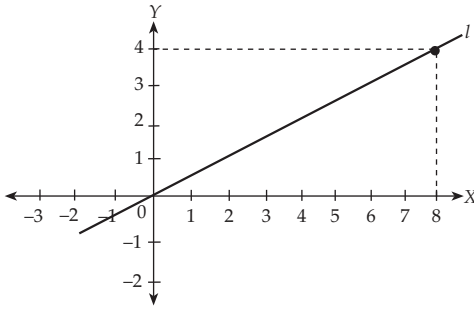
1. Garis $y = mx$ selalu melalui pusat koordinat (0, 0).
2. Garis $y = mx + c$ memotong sumbu-Y pada koordinat $(0, c)$.
3. Gradien adalah ukuran kemiringan suatu garis lurus dan dinotasikan m.
4. Gradien $= \dfrac{\text{Panjang Komponen } y}{\text{Panjang Komponen } x}$
5. Garis miring ke kanan atas atau kiri bawah bergradien positif.
6. Garis miring ke kiri atas atau kanan bawah bergradien negatif.
7. Gradien garis yang melalui (0, 0)dan (x, y) adalah $m = \dfrac{y_1}{x_1}$.
8. Gradien garis yang melalui (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
9. Gradien garis yang sejajar sumbu-X adalah 0.
10. Gradien garis yang sejajar sumbu-Y adalah tak terdefinisikan.
11. Gradien dua garis yang sejajar adalah sama.
12. Hasil perkalian gradien dua garis yang saling tegak lurus adalah –1.
13. Persamaan garis dengan gradien m dan melalui (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.
14. Persamaan garis melalui (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

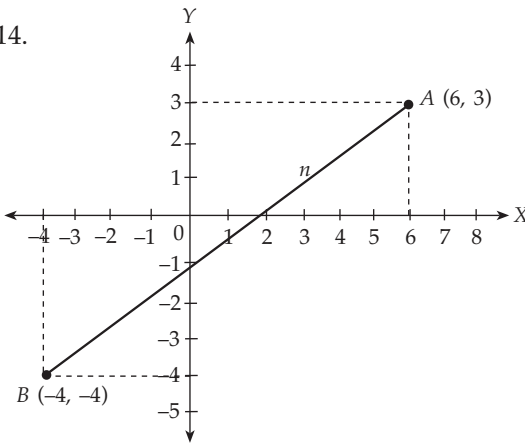
Uji Kompetensi Bab 3

A Pilihan ganda

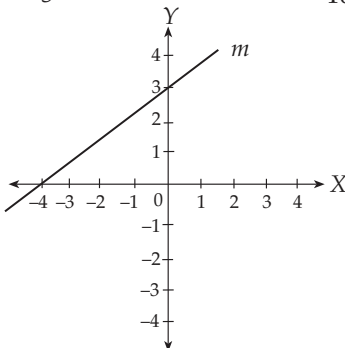
Berilah tanda silang (×) pada huruf a, b, c, atau d pada jawaban yang benar.

1. Gradien garis $2y = 3x - 6$ adalah ....
   a. $-\frac{3}{2}$ c. $\frac{2}{3}$
   b. $-\frac{2}{3}$ d. $\frac{3}{2}$
2. Persamaan garis yang melalui (0, 0) dan (3, –5) adalah ....
   a. $y = -\frac{5}{3}x$ c. $y = \frac{3}{5}x$
   b. $y = -\frac{3}{5}x$ d. $y = \frac{5}{3}x$
3. Persamaan garis yang melalui (0, 3) dan (4, 0) adalah ....
   a. $y = -\frac{4}{3}x + 3$ c. $y = \frac{3}{4}x + 3$
   b. $y = -\frac{3}{4}x + 3$ d. $y = \frac{4}{3}x + 3$
4. Persamaan garis yang melalui (2, –1) dan bergradien 3 adalah ....
   a. $y = 3x - 5$ c. $y = x - 5$
   b. $y = 3x - 7$ d. $y = 3x - 3$
5. Gradien garis dengan persamaan $2x - 5y - 10 = 0$ adalah ...
   a. $-\frac{5}{2}$ c. $\frac{2}{5}$
   b. $-\frac{2}{5}$ d. $\frac{5}{2}$
6. Gradien dari persamaan $3x + 4y - 2 = 0$ adalah ....
   a. $-\frac{4}{3}$ c. $\frac{3}{4}$
   b. $-\frac{3}{4}$ d. $\frac{4}{3}$
7. Gradien garis dari persamaan $4y = 6 - 5x$ adalah ....
   a. $-\frac{5}{4}$ c. $\frac{4}{5}$
   b. $-\frac{4}{5}$ d. $\frac{5}{4}$
8. Gradien garis yang melalui (2, 5) dan (–3, 8) adalah ....
   a. $-\frac{5}{3}$ c. $\frac{1}{3}$
   b. $-\frac{3}{5}$ d. $\frac{5}{3}$
9. Jika titik A (–4, a) terletak pada garis yang persamaannya $3x + 2y - 4 = 0$ maka nilai a adalah ....
   a. 6 c. 10
   b. 8 d. 12
10. Jika titik R (r, –2) terletak pada garis yang persamaannya $2x + 3y - 4 = 0$ maka nilai r adalah ....
    a. 3 c. 5
    b. 4 d. 6
11. Persamaan garis yang melalui (2, 8) dan sejajar garis $2y = 4x - 2$ adalah ....
    a. $y = \frac{1}{2}x + 4$ c. $y + 2x = 4$
    b. $y = -\frac{1}{2}x - 1$ d. $y - 2x = 4$
12. Persamaan garis yang melalui (8, –6) dan tegak lurus garis $3y - 4x = 8$ adalah ....
    a. $y = -\frac{3}{4}x$ c. $4y + 3x + 8 = 0$
    b. $y = -\frac{4}{3}x$ d. $4y + 3x + 32 = 0$

13. Gradien garis l pada gambar di bawah ini adalah ....

a. -2
b. $-\frac{1}{2}$
c. $\frac{1}{2}$
d. 2

14.

Gradien garis n pada gambar di atas adalah ....

a. $-\frac{5}{4}$
b. $-\frac{4}{5}$
c. $\frac{7}{10}$
d. $-\frac{7}{10}$

15.

Gradien garis m pada gambar di atas adalah ....

a. $-\frac{4}{3}$
b. $-\frac{3}{4}$
c. $\frac{3}{4}$
d. $\frac{4}{3}$

16. Jika A (2, 5) dan B (–3, 10) maka persamaan garis yang melalui (–4, –8) dan sejajar AB adalah ....

a. $y + x - 12 = 0$
b. $y + x = 12$
c. $y = x + 12$
d. $y = -x - 12$

17. Diketahui P (–3, –5) dan R (–2, –8). Persamaan garis yang melalui (–2, 4) dan tegak lurus PR adalah ....

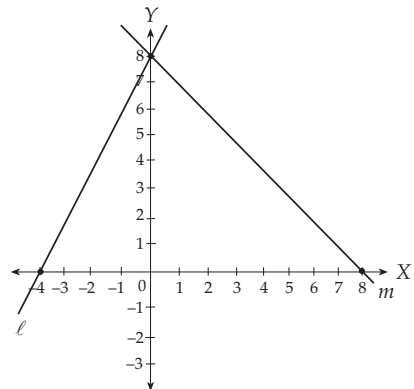
a. $y = -3x - 2$
b. $y = \frac{1}{3}x + 14$
c. $3y = x + 14$
d. $y = 3x + 14$

18. Dari titik-titik di bawah ini, yang terletak pada persamaan garis yang melalui (3, 4) dan (5, 8) adalah ....

a. (8, 5)
b. (5, –8)
c. (–8, –5)
d. (–2, –6)

19. Diketahui segitiga ABC dengan A (2, 6), B (–5, 8) dan C (2, –9). Persamaan garis yang melalui C dan tegak lurus AB adalah ....

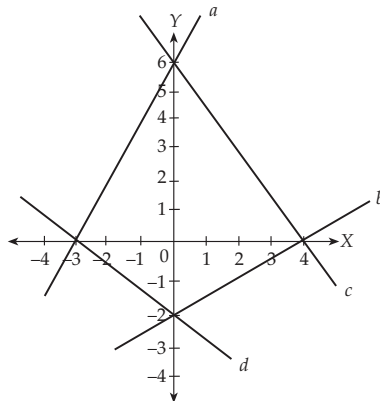
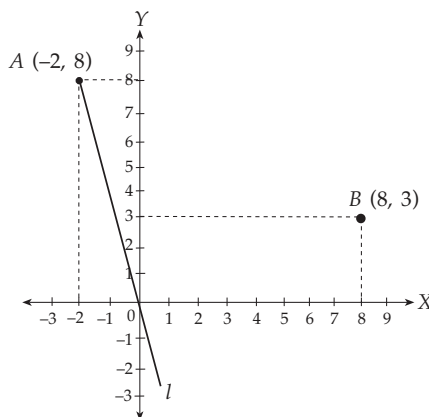
a. $2y = 7x - 32$
b. $2y = -7x - 32$
c. $y = -7x - 16$
d. $y = 7x - 2$

20. Perhatikan gambar di bawah ini.

Persamaan garis m dan garis ℓ adalah ....

a. $8x + 8y = 8$ dan $-2x + y = 8$
b. $x + y = 8$ dan $y - 2x = 8$
c. $x - y = -8$ dan $y - 2x - 8 = 0$
d. $x + y = 8$ dan $y - 2x + 8 = 0$

B Esai

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini.

1. Tentukanlah gradien garis yang melalui titik-titik berikut.
   a. A (2, –3) dan B (4, –2)
   b. C (–2, 1) dan D ($-\frac{1}{2}$, 3)
   c. P (2, 7) dan Q (1, –2)
   d. R (–2, 3) dan S (–2, –5)
2. Gambarlah grafik dari persamaan-persamaan garis berikut dan tentukan hal apa yang sama dari persamaan-persamaan garis berikut ini.
   a. $y = x + 3$
   b. $y = -x + 3$
   c. $y = 2x + 3$
   d. $y = -2x + 3$
   e. $y = 3x + 3$
   f. $y = -3 + 3$
3. Di antara pasangan-pasangan garis berikut, manakah yang saling tegak lurus dan tidak tegak lurus.
   a. $y = 8x$ dan $y = \frac{1}{8}x$
   b. $y + \frac{2}{3}x = 0$ dan $y = \frac{3}{2}x$
   c. $y = \frac{3}{4}x - 3$ dan $y = -\frac{3}{4}x - 3$
   d. $y + x = 8$ dan $y = x + 2$
   e. $y = -\frac{3}{5}x$ dan $\frac{3}{5}x - y = 0$
4. Jika sebuah persamaan $y = px + 8$ sejajar dengan garis yang melalui titik O (0, 0) dan titik (2, 5), berapakah nilai p?
5. Jika garis dengan persamaan $y = -\frac{1}{2}ax + 1$ tegak lurus dengan garis $y = \frac{2}{3}x + 1$, berapakah nilai a?
6. Tentukanlah persamaan garis lurus yang tegak lurus dengan persamaan $y = -2$. Ada berapa buah garis lurus yang tegak lurus dengan garis $y = -2$?
7. Tentukanlah titik potong dari garis-garis berikut.
   a. $y + x = 5$ dan $x - y = 3$
   b. $y - 2x = 3$ dan $3y + 4x = 2$
   c. $2y + 3x = 4$ dan $2y - 3x = -8$
   d. $5y - 4x = -6$ dan $4y + 5x = 12$
   e. $6y = 3x - 2$ dan $2y - 5x - 2 = 0$
8. Tentukanlah gradien garis a, b, c, dan d!

9.

   Tentukanlah persamaan garis yang melalui B (8, 3) dan tegak lurus l.
10. Nyatakanlah bentuk berikut menjadi bentuk $y = mx + c$ dan tentukanlah gradiennya.
    a. $\frac{4y - 2x}{2} = 3x - 2$
    b. $\frac{5y - 2x}{3} = 2x - 3$
    c. $\frac{6y - 3x}{5} = 2x - 2$
    d. $\frac{3y - 4x}{6} = x - 3$

BAB 4

Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Sumber: www.jalmiburung.files.wordpress.com

Tujuan Pembelajaran

- Memahami pengertian persamaan linear dua variabel dan sistem persamaan linear dua variabel
- Menentukan akar dan bukan akar PLDV
- Menyelesaikan SPLDV dan dapat menggunakannya untuk pemecahan masalah.

Di kelas VII telah dipelajari persamaan linear satu variabel. Masih ingatkah kalian dengan pelajaran tersebut? Dapatkah kalian menentukan harga sebuah mangga jika harga lima mangga Rp10.000,00?

Di kelas VIII akan dipelajari persamaan linear dengan dua variabel. Penerapan persamaan linear dua variabel dalam kehidupan sehari-hari cukup banyak, contohnya seperti berikut.

Seorang tukang parkir mendapat uang parkir Rp1.500,00 untuk 2 motor dan 1 mobil. Dua jam kemudian ia mendapat Rp4.500,00 untuk 2 motor dan 4 mobil. Dapatkah kalian menentukan tarif parkir untuk 1 motor dan 1 mobil yang ditetapkan oleh tukang parkir itu? Menurut kalian, apakah pertanyaan tersebut dapat dijawab dengan membentuk sistem persamaan linear dua variabel? Agar kalian dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, mari kita pelajari pembahasan pada bab ini.

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Hitunglah x, jika:
   a. $x + 5 = 20$
   b. $x - 2 = 15$
2. Harga 10 mangga Rp20.000. Berapa harga 1 mangga?
3. Harga 1 pulpen sama dengan 2 buku. Jika harga enam buku Rp6.000,00. Hitunglah harga 1 pulpen.
4. Hitunglah x
   a. $\frac{2}{x} + 6 = 10$ b. $5 - 2x = 17$

A Bentuk-Bentuk Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Masih ingatkah kalian pengertian persamaan linear satu variabel yang telah dipelajari di kelas VII? Pada pembahasan kali ini akan dipelajari persamaan linear yang lain serta sistemnya, yaitu persamaan linear dua variabel. Perbedaan persamaan linear dua variabel dan persamaan linear satu variabel hanya banyak variabelnya saja. Untuk lebih jelasnya perhatikan pembahasan berikut.

1 Persamaan Linear Dua Variabel (PLDV) dan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV)

Agar kalian dapat memahami pengertian persamaan linear dua variabel (PLDV) dengan mudah, coba kalian amati dan perhatikan ciri-ciri dari contoh persamaan berikut.

1. $x + y = 5$ (PLDV)
2. $4a - 2 = 9$ (bukan PLDV karena hanya memuat satu variabel, yaitu a)
3. $3p = 3r + 10$ (PLDV)
4. $\frac{v}{4} - \frac{t}{3} = 8$ (PLDV)
5. $2m - 5n + 8 = 0$ (PLDV)
6. $3b^2 - 4a = 2$ (bukan PLDV karena pangkat tertinggi dari variabelnya adalah 2, yaitu $3b^2$)

Sekarang coba kalian tuliskan dengan kata-katamu sendiri pengertian persamaan linear dua variabel berdasarkan ciri-ciri yang terlihat pada contoh di atas. Setelah itu bandingkan jawabanmu dengan pernyataan berikut.

> Persamaan linear dua variabel adalah sebuah persamaan yang mempunyai dua variabel, dengan masing-masing variabel memiliki pangkat tertinggi satu dan tidak ada perkalian di antara kedua variabel tersebut.

Setelah membandingkan jawabanmu dengan pernyataan di atas, *coba kalian beri alasan, mengapa pada contoh nomor* 2 *dan* 6 *di atas tidak termasuk PLDV?*

Selanjutnya kita dapat menyelesaikan persamaan linear dua variabel dengan menggunakan pasangan-pasangan berurutan.

Contoh SOAL

Tentukanlah pasangan berurutan dari persamaan linear $x + y = 5$ dan gambar pasangan berurutannya pada bidang Cartesius untuk $x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

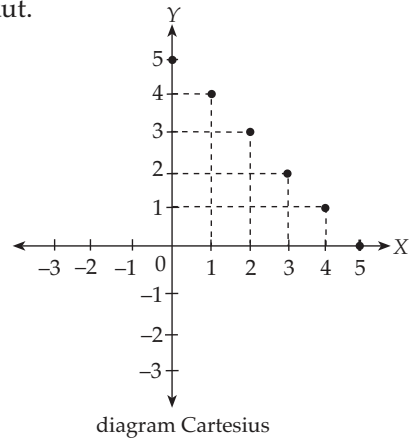
Penyelesaian:

Pasangan-pasangan berurutan dari $x + y = 5$

untuk

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \longrightarrow y = 5 \\ x = 1 \longrightarrow y = 4 \\ x = 2 \longrightarrow y = 3 \\ x = 3 \longrightarrow y = 2 \\ x = 4 \longrightarrow y = 1 \\ x = 5 \longrightarrow y = 0 \end{array}\right\} \text{substitusikan } x \text{ ke persamaan linear } x + y = 5$$

Jadi, pasangan berurutannya adalah {(0,5), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (5,0)}. Pasangan berurutan itu merupakan himpunan penyelesaian dari persamaan linear $x + y = 5$. Pasangan berurutan tersebut dapat digambarkan pada diagram Cartesius sebagai berikut.

diagram Cartesius

Dari contoh di atas dapat disimpulkan bahwa:

> Himpunan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel adalah lebih dari satu penyelesaian (banyak penyelesaian).

Sistem persamaan linear dengan dua variabel mempunyai bentuk umum sebagai berikut.

$$\begin{cases} ax + by = c & \text{(PLDV 1)} \\ dx + ey = f & \text{(PLDV 2)} \end{cases}$$

Nilai x dan y untuk kedua persamaan linear dua variabel (PLDV) di atas adalah nilai yang sama, baik untuk PLDV 1 maupun PLDV 2. Hal ini karena nilai x dan y untuk kedua PLDV adalah himpunan penyelesaian yang tunggal dan memenuhi kedua PLDV. Dengan demikian, dapat dikatakan kedua PLDV di atas memiliki keterkaitan satu sama lain yang disebut ***sistem***. *Tulislah dengan kata-katamu sendiri pengertian sistem dalam suatu SPLDV.*

Berikut beberapa contoh sistem persamaan linear dengan dua variabel yang dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk dan variabel.

1. $\begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ 2x + 6y = 12 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{m}{4} + \dfrac{n}{2} = 3 \\ \dfrac{2m - n}{3} = 6 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(a + b) = 6 \\ \dfrac{2}{3}(6a - 3b) = 12 \end{cases}$

PLDV	SPLDV
• Hanya terdiri dari satu persamaan linear dua variabel. • Himpunan penyelesaian ada banyak dan hanya memenuhi satu persamaan linear dua variabel.	• Terdiri dari dua persamaan linear dua variabel. • Himpunan penyelesaiannya tunggal dan memenuhi kedua persamaan linear dua variabel.

Dapatkah kalian mencari perbedaan yang lain antara PLDV dan SPLDV? Bandingkan jawabanmu dengan jawaban temanmu.

2 Akar dan Bukan Akar PLDV dan SPLDV

Sebagaimana yang telah kita ketahui sebelumnya bahwa suatu PLDV memiliki banyak penyelesaian. Contohnya pada bentuk $x + y = 5$ yang merupakan suatu PLDV. Nilai x dan y dapat digantikan dengan berbagai pasangan bilangan tertentu yang membuat pernyataan $x + y = 5$ menjadi *benar*.

Misalnya $x = 1$ dan $y = 4$
$x = 2$ dan $y = 3$
$x = 3$ dan $y = 2$

Nilai $x = 1$ dan $y = 4$ di atas merupakan salah satu penyelesaian dari $x + y = 5$. Jika $x = 1$ dan $y = 4$ disubtitusikan ke $x + y = 5$ maka persamaan $x + y = 5$ menjadi *benar*. Penyelesaian inilah yang biasa disebut *akar* dari suatu persamaan, sehingga dapat dikatakan $x = 1$ dan $y = 4$ adalah akar dari $x + y = 5$.

Sekarang, coba kalian substitusikan atau ganti nilai $x = 3$ dan $y = 2$ pada bentuk SPLDV berikut.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Jika nilai $x = 3$ dan $y = 2$ disubstitusikan pada bentuk $x + y = 5$ maka akan bernilai *benar* dan jika disubstitusikan pada bentuk $x - y = 1$ juga akan bernilai *benar*. Dengan demikian, nilai $x = 3$ dan $y = 2$ disebut *akar* dari SPLDV. Sebaliknya, jika nilai $x = 4$ dan $y = 1$ bernilai *benar* hanya

untuk salah satu bentuk dari SPLDV, sehingga nilai $x = 4$ dan $y = 1$ *bukan akar* dari SPLDV. *Mengapa demikian? Dapatkah kalian memberikan alasannya? Jika kalian tidak mengerti, mintalah petunjuk dari gurumu.*

Ternyata nilai $x = 3$ dan $y = 2$ adalah akar dari SPLDV di atas sehingga nilai x atau y yang lain *bukan akar* dari SPLDV di atas. Perhatikanlah penjelasan berikut ini.

Jika $x = 2$ dan $y = 3$ disubstitusikan pada $x + y = 5$, maka diperoleh $2 + 3 = 5$ (benar)

Jika $x = 2$ dan $y = 3$ disubtitusikan pada $x - y = 1$, maka diperoleh $2 - 3 = -1$ (tidak benar)

Jadi, dapat disimpulkan arti "dan" pada "$x = 3$ dan $y = 2$" menyatakan pasangan nilai x dan y sebagai penyelesaian (solusi) tunggal dari SPLDV di atas.

Coba sekarang kalian selidiki dan amati apakah ada penyelesaian dari SPLDV yang tidak memakai kata "dan"? Berikan alasanmu.

LATIHAN 1

1. Tentukan mana yang PLSV dan PLDV dari persamaan-persamaan berikut.
   a. $8p + 3 = 3p$
   b. $8a + 2b = 3a$
   c. $\frac{8}{2a} = 14$
   d. $\frac{2k - 3l}{6} = 14$
   e. $x = -\frac{3}{4}y$
   f. $y = 3x - 2$
2. Manakah yang merupakan SPLDV di antara persamaan berikut.
   a. $2y - 3x = 8$ dan $4x - 3y = -2$
   b. $x(x - 2) = 1$ dan $8y - 3 = 2x$
   c. $\frac{2x}{4} - \frac{3x}{2} = 12$ dan $\frac{3x - 4y}{2} = 6$
   d. $3y - 4 = 2x$ dan $y\,(2 - 3x) = 1$
3. Tentukan variabel dan koefisien SPLDV berikut.
   a. $3y - 6x = 10$ dan $8y - 4x = 16$
   b. $3p - q = 14$ dan $p + 24 = 20$
   c. $\frac{3a - b}{4} = 5$ dan $\frac{1}{3}a + b = 12$
   d. $\frac{1}{3}(x - 2y) = 18$ dan $\frac{1}{2}(4x + y) = 24$
4. Tentukanlah pasangan x dan y yang merupakan akar dari SPLDV $3x + 2y = 12$ dan $2x - y = 1$
5. Tentukanlah pasangan x dan y yang merupakan akar dari $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$ dan $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$.

Tugas Siswa

Umur seorang bapak ditambah 4 kali umur anaknya adalah 72 tahun. Jika 2 kali umur bapak ditambah dengan 3 kali umur anaknya 104 tahun, carilah cara menentukan umur bapak dan umur anak dengan membentuk suatu SPLDV. Tentukanlah umur bapak dan anak.

B Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Pada subbab sebelumnya kalian telah mengenal akar dari SPLDV dengan cara mencoba-coba memasukkan suatu bilangan untuk variabelnya. Pada pembahasan berikut akan dipelajari cara cepat untuk menentukan penyelesaian SPLDV. Untuk lebih jelasnya, perhatikan pembahasan berikut.

Untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dua variabel dapat dilakukan dengan 3 cara, yaitu:

1. cara substitusi;
2. cara eliminasi;
3. cara grafik.

1 Cara Substitusi

Substitusi merupakan salah satu cara yang sering digunakan karena cukup mudah penggunaannya. Caranya adalah dengan mensubstitusi (mengganti) variabel tertentu sehingga nilai variabel lainnya dapat ditentukan. Untuk lebih jelasnya pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh SOAL

Dengan cara substitusi, tentukanlah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $2x + y = 12$ dan $3x + 5y = 25$.

Penyelesaian:

Dari dua persamaan di atas dipilih $2x + y = 12$, kemudian diubah menjadi $y = 12 - 2x$.

$y = 12 - 2x$ disubstitusi ke y pada persamaan $3x + 5y = 25$ sehingga menjadi:

$$3x + 5(12 - 2x) = 25$$
$$3x + 60 - 10x = 25$$
$$-7x = 25 - 60$$
$$-7x = -35$$
$$x = \frac{-35}{-7}$$
$$x = 5$$

Nilai $x = 5$ disubstitusikan ke y maka:

$$y = 12 - 2x$$
$$y = 12 - 2(5)$$
$$y = 12 - 10$$
$$y = 2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {5, 2}.

LATIHAN 2

1. Dengan menggunakan cara substitusi, tentukanlah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut ini.
   a. $3x + 7y = 35$ dan $x = 7$
   b. $3x + 4y = -4$ dan $5y = 45$
   c. $3x + 4y = 10$ dan $4x + y = 9$
   d. $8x - y = 34$ dan $x + 8y = 53$
   e. $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 5$ dan $x - y = 4$
   f. $\frac{5x}{6} - y = 3$ dan $x - \frac{5y}{6} = 8$

2. Dengan cara substitusi, tentukanlah nilai variabel dari persamaan berikut.

a. $\begin{cases} \frac{b+1}{a} = 2 \\ \frac{a+1}{b} = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{2x+y}{2} = 5 \\ \frac{3x-4}{y} = 4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4(x - y) + x = 3(x + y) - 1 \\ 2(x + 3y) = 5(x - 2y) + 3y + 4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2(y - 1) = x - 1 \\ x + y = 5(x - y + 3) \end{cases}$

3. Jumlah uang Encep dan Jajang adalah Rp80.000,00. Jika Encep dan Jajang masing-masing membelanjakan Rp10.000,00, maka uang Encep menjadi dua kali uang Jajang. Carilah cara menentukan uang Encep dan Jajang dengan membentuk suatu SPLDV kemudian selesaikan dengan cara substitusi.

4. Seseorang mempunyai uang sebesar Rp37.000.000,00. Ia membungakan uang di dua bank. Untuk modal yang besar, ia mendapat bunga 5% dan modal yang kecil 4%. Selisih bunga yang diterima Rp320.000,00. Carilah cara menentukan modal masing-masing orang dengan membentuk suatu SPLDV dan tentukan lah besar modal masing-masing dengan cara substitusi.

2 Cara Eliminasi

Cara **eliminasi** dalam sistem persamaan linear dua variabel adalah dengan mengeliminasi atau menghilangkan salah satu variabel sehingga variabel lainnya dapat ditentukan nilainya. Untuk mengeliminasi salah satu variabel perlu disamakan dahulu koefisien variabel yang akan dieliminasi. Pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh SOAL

Dengan cara eliminasi, tentukanlah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $2x + 3y = 16$ dan $3x + 4y = 23$

Penyelesaian:

Untuk mengeliminasi x, samakan koefisien x dari kedua persamaan sehingga sistem persamaannya menjadi:

$$\begin{array}{lll} 2x + 3y = 16 \mid \times 3 & \Leftrightarrow & 6x + 9y = 48 \\ 3x + 4y = 23 \mid \times 2 & \Leftrightarrow & 6x + 8y = 46 \quad - \\ \hline & & y = 2 \end{array}$$

Untuk mengeliminasi y, samakan koefisien y dari kedua persamaan sehingga sistem persamaan menjadi:

$$\begin{array}{lll} 2x + 3y = 16 \mid \times 4 & \Leftrightarrow & 8x + 12y = 64 \\ 3x + 4y = 23 \mid \times 3 & \Leftrightarrow & 9x + 12y = 69 \quad - \\ \hline & & -x = -5 \\ & & x = 5 \end{array}$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan di atas adalah (5, 2).

Selain dengan kedua cara di atas, kalian juga dapat menyelesaikan suatu SPLDV dengan menggunakan cara campuran yaitu cara eliminasi dan substitusi. Carilah informasi dari buku di perpustakaan atau sumber lain mengenai cara campuran itu.

LATIHAN 3

1. Dengan cara eliminasi, tentukanlah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.
   a. $x + 2y = 3$ dan $x - 4y = -3$
   b. $5x - 3y = 26$ dan $3x + 5y = 36$
   c. $-5x + 3y = 4$ dan $6x - 5y = 5$
   d. $8x - 9y = 4$ dan $20x - 21y = 16$
   e. $7x + 2y = 47$ dan $5x - 4y = 1$
   f. $171x - 213y = 642$ dan $114x - 326y = 244$
2. Dengan cara eliminasi, hitunglah nilai peubah berikut.
   a. $\begin{cases} \frac{2x + y}{2} - \frac{3x - 4y}{5} = 4 \\ \frac{1}{3}x + 2y + 0{,}4x - 1{,}2y = 1 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} \frac{2x}{5} + \frac{y - 1}{10} = 1 \\ \frac{5x - 2}{6} - \frac{y - 2}{3} = 1 \end{cases}$
   c. $\begin{cases} \frac{2x}{5} + \frac{3y}{2} = 2{,}6 \\ x + 2y + 4 = \frac{8y - 5x}{3} \end{cases}$
   d. $\begin{cases} \frac{x - y}{2} + \frac{x + y}{3} = 4\frac{1}{6} \\ x + y - \frac{2}{3}(y - x) = 5 \end{cases}$

3 Cara Grafik

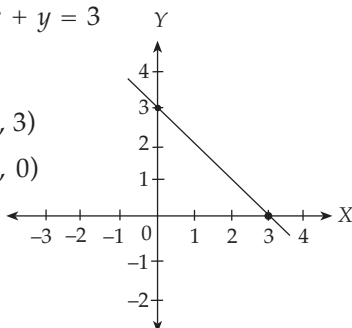
Sistem persamaan linear dua variabel dapat diselesaikan dengan cara grafik. Penyelesaian dengan cara **grafik** adalah menggunakan grafik sebagai penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel. Cara grafik yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel, hampir sama dengan cara menentukan koordinat titik potong dari dua garis lurus yang telah dipelajari pada bab sebelumnya. Untuk lebih jelasnya perhatikanlah contoh soal berikut.

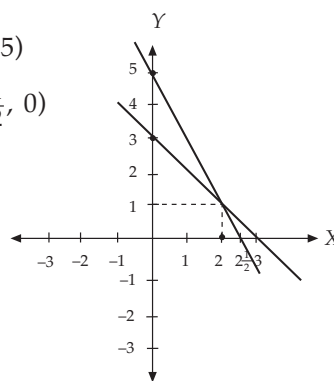
Contoh SOAL

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari SPDLV $x + y = 3$ dan $2x + y = 5$

Penyelesaian:

Dibuat grafik $x + y = 3$

x	y	
0	3	→ (0, 3)
3	0	→ (3, 0)

Dibuat grafik $2x + y = 5$

x	y	
0	5	→ (0, 5)
$2\frac{1}{2}$	0	→ $(2\frac{1}{2}, 0)$

Pada gambar tersebut kedua grafik berpotongan pada titik (2, 1). Jadi, penyelesaian dari $x + y = 3$ dan $2x + y = 5$ adalah (2, 1).

Sekarang coba kalian diskusikan dengan teman-temanmu, bagaimanakah himpunan penyelesaian dari suatu sistem persamaan dua variabel bila kedua grafik dari persamaannya tidak saling berpotongan atau sejajar. Apa yang dapat kalian simpulkan dari jawaban pertanyaan tersebut?

Dari contoh didapat penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel $x + y = 3$ dan $2x + y = 5$ adalah $x = 2$ dan $y = 1$. Penyelesaian tersebut adalah titik potong dari garis $x + y = 3$ dan $2x + y = 5$.

Penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan cara grafik didapat dengan menggambar persamaan linear yang diberikan dan menentukan titik potongnya. Titik potong dari garis-garis persamaan linear tersebut adalah penyelesaiannya.

LATIHAN 4

1. Dengan cara grafik, tentukanlah nilai x dan y dari persamaan berikut.
   a. $x + y = 7$ dan $x - y = 5$
   b. $4x + y = -12$ dan $2x + 5y = -6$
   c. $3x - 2y = 6$ dan $6y = 5x + 30$
   d. $6x + 5y = 30$ dan $4x + 5y = 20$
2. Harga 4 kg gula dan 3 kg tepung adalah Rp41.000,00. Harga 6 kg gula dan 5 kg tepung Rp64.000,00. Buatlah suatu SPLDV dari pernyataan di atas dan tentukanlah harga 1 kg gula dan tepung dengan menggunakan cara grafik.

Dari ketiga cara menyelesaikan SPLDV tersebut, cara mana yang kalian anggap paling mudah dikerjakan? Berikan alasanmu.

4 Sistem Persamaan Nonlinear Dua Variabel

Bentuk $x + y = 5$ dan $x - y = 1$ adalah bentuk-bentuk dari persamaan linear dua variabel (PLDV), sedangkan bentuk $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ adalah bentuk dari sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV).

Berikut salah satu bentuk sistem persamaan nonlinear dua variabel.

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = c \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = d \end{cases}$$

Bentuk-bentuk persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan sistem persamaan linear dua variabel, seperti yang dapat kalian pahami dari contoh soal berikut.

Contoh SOAL

Hitunglah nilai a dan b dari sistem persamaan berikut.

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 8 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Misalkan $\frac{1}{a} = x$ dan $\frac{1}{b} = y$

Untuk $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4$ maka $x - y = 4$ .... (1)

Untuk $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 8$, maka $x + y = 8$ .... (2)

Dengan mengubah $x - y = 4$ menjadi $y = x - 4$, kemudian subtitusikan $y = x - 4$ ke persamaan (2) diperoleh:

$$\begin{aligned} x + (x - 4) &= 8 \\ 2x - 4 &= 8 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Substitusikan $x = 6$ ke

$$\begin{aligned} x - y &= 4 \\ 6 - y &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Untuk $x = 6 \Rightarrow \frac{1}{a} = x$

$$\frac{1}{a} = 6$$

Untuk $y = 2 \Rightarrow \frac{1}{b} = y$

$$\frac{1}{b} = 2$$

maka diperoleh $a = \frac{1}{6}$ dan $b = \frac{1}{2}$.

LATIHAN 5

1. Hitunglah nilai peubah berikut.

   a. $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 5 \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} \frac{6}{a} - \frac{5}{b} = 9 \\ \frac{7}{a} - \frac{2}{b} = 5 \end{cases}$

   c. $\begin{cases} \frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} = 1 \\ \frac{1}{3a} - \frac{1}{2b} = -\frac{5}{6} \end{cases}$

   d. $\begin{cases} \frac{1}{4a} + \frac{1}{2b} = \frac{13}{4} \\ \frac{1}{4a} - \frac{1}{3b} = -\frac{11}{12} \end{cases}$

2. Hitunglah nilai peubah dari:

   a. $\begin{cases} 4a + 3b = 12ab \\ 8a - 5b = 2ab \end{cases}$

   b. $\begin{cases} \frac{5}{3}a + \frac{3}{2}b = \frac{1}{6}ab \\ b - \frac{4}{5}a = 1\frac{1}{15}ab \end{cases}$

3. Sebuah pecahan jika penyebutnya ditambah satu dan pembilangnya dikalikan dengan 2 nilainya menjadi $\frac{3}{4}$. Jika pembilang ditambah 1 dan penyebutnya dikurangi 1 nilai pecahan menjadi $\frac{2}{3}$. Dengan membuat suatu SPLDV, tentukanlah pecahan mula-mula.

C Aplikasi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dalam Kehidupan

Model matematika adalah salah satu penerapan atau aplikasi dari sistem persamaan linear dua variabel. Model matematika yang dimaksud adalah bentuk sistem persamaan linear dua variabel yang mewakili suatu pernyataan dari masalah yang ada dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya harga barang, umur seseorang, banyaknya tepung, banyaknya buah, dan lain-lain. Untuk memahaminya pelajari contoh berikut.

Contoh SOAL

1. Seorang tukang parkir mendapat uang parkir Rp1.500,00 untuk 2 motor dan 1 mobil. Pada saat 2 jam kemudian, ia mendapat Rp4.500,00 untuk 2 motor dan 4 mobil. Hitunglah tarif parkir untuk setiap 1 mobil dan 1 motor.

Penyelesaian:

Misalkan tarif parkir motor = x dan tarif parkir mobil = y

Tarif parkir 2 motor dan 1 mobil Rp1.500,00 maka model matematikanya $2x + y = 1.500$.

Tarif parkir 2 motor dan 4 mobil Rp4.500,00 maka model matematikanya $2x + 4y = 4.500$.

Kemudian, sistem persamaan linear dua variabel di atas diselesaikan dengan cara eliminasi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 4.500 \\ 2x + y &= 1.500 \quad - \\ \hline 3y &= 3.000 \\ y &= \frac{3.000}{3} = 1.000 \end{aligned}$$

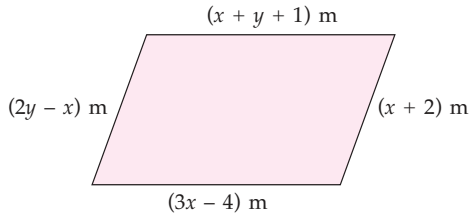
substitusikan nilai y ke persamaan

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1.500 \text{ menjadi} \\ 2x + 1.000 &= 1.500 \\ 2x &= 1.500 - 1.000 \end{aligned}$$

$$2x = 500$$

$$x = \frac{500}{2} = 250$$

Jadi, tarif parkir sebuah motor Rp250,00 dan tarif parkir sebuah mobil Rp1.000,00. Cobalah kamu selesaikan soal ini dengan cara grafik. Gunakan kertas berpetak. Bandingkan hasilnya dengan jawaban di atas.

2. Pak Robi memliki sebidang tanah berbentuk jajargenjang dengan ukuran seperti berikut.

Berapakah keliling tanah Pak Robi?

Penyelesaian:

Jajargenjang memiliki dua pasang sisi yang sejajar dan sama panjang.

$x + y + 1 = 3x - 4$

$y = 2x - 5$ ....(1)

$2y - x = x + 2$

$2y = 2x + 2$

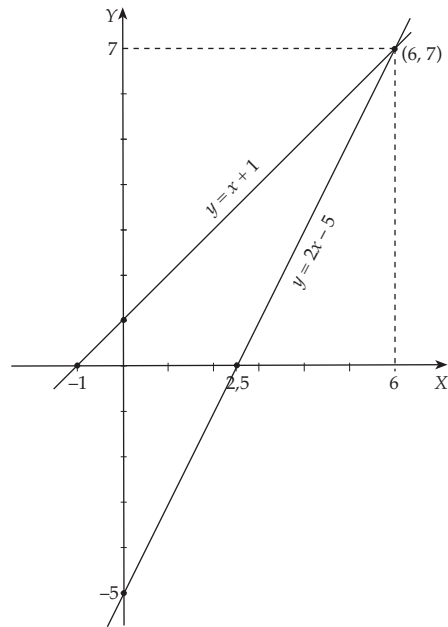
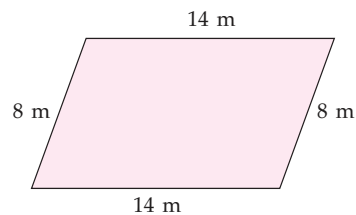
$y = x + 1$ ....(2)

Kita akan menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel tersebut dengan cara grafik.

$y = 2x - 5$

x	y	
0	–5	(0, –5)
2,5	0	(2,5, 0)

$y = x + 1$

x	y	
0	1	(0, 1)
–1	0	(–1, 0)

Dari gambar kita peroleh titik potong kedua grafik tersebut adalah (6, 7). Jadi, kita peroleh nilai $x = 6$ dan $y = 7$. Kemudian kita substitusikan nilai ini ke dalam setiap sisi jajargenjang.

Dengan demikian, keliling tanah Pak Robi adalah (14 + 8 + 14 + 8) m = 44 m. Cobalah kamu selesaikan soal di atas dengan metode eliminasi. Kemudian bandingkan hasil yang kamu peroleh.

Soal-Soal Kontekstual

1. Harga 5 pensil dan 7 buku adalah Rp13.000.00, sedangkan harga 6 pensil dan 5 buku adalah Rp10.500,00. Tentukanlah harga setiap pensil dan buku.

2. *ABCD* adalah persegi panjang.

   $AB = 2x - 10$; $AD = 2y$

   $DC = x + y - 2$; $BC = x + 12$

   Hitunglah keliling persegi panjang tersebut.

3. Tentukanlah dua bilangan yang jumlahnya 138 dan selisihnya 88.

4. Dua kali umur bapak dikurangi 5 kali umur anak adalah 20 tahun. Jika 3 kali umur bapak dikurangi dengan 4 kali umur anaknya adalah 65 tahun, tentukanlah umur bapak dan anak masing-masing.
5. Sebuah bilangan terdiri dari dua angka. Nilai bilangan itu 6 kali jumlah angka-angkanya. Jika angka puluhan lebih satu dari angka satuan, tentukanlah bilangan tersebut.
6. Pembilang dan penyebut suatu pecahan mempunyai perbandingan 3 : 5. Jika 2 kali pembilang ditambah dengan 4 kali penyebut adalah 208, tentukanlah pecahan itu.
7. Jumlah dua bilangan 2.000. Seperlima dari bilangan pertama sama dengan sepertiga dari bilangan kedua. Tentukanlah kedua bilangan itu.
8. Sebuah bilangan terdiri dari dua angka. Jumlah angka-angkanya 9. Jika angka-angka pada bilangan itu dipertukarkan diperoleh bilangan baru yang besarnya $2\frac{2}{3}$ kali bilangan semula. Tentukanlah bilangan itu.

KEGIATAN

Kerjakan kegiatan ini dengan temanmu (1 orang). Pergilah ke sebuah swalayan untuk berbelanja buah-buahan. Kamu bertugas membeli 2 buah pepaya dan 6 buah apel, sedangkan temanmu membeli 4 buah pepaya dan 2 buah apel. Kemudian, bayarlah sesuai belanjaan masing-masing.

a. Perhatikan data harga yang kalian dapatkan dari bon belanja masing-masing. Misalkan x = harga 1 buah pepaya dan y = harga 1 buah apel. Tentukanlah masing-masing orang satu persamaan linear dua variabel yang dapat dibentuk dari harga barang yang ada pada bon kalian masing-masing.
b. Tentukanlah harga masing-masing buah tersebut dengan menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel yang diperoleh dari 2 persamaan yang telah kalian tentukan pada bagian a.
c. Cobalah kalian kerjakan soal b dengan cara grafik, substitusi, dan eliminasi. Manakah menurutmu cara yang paling cepat dan mudah dikerjakan?
d. Hitunglah harga dari 5 kg pepaya dan 4 kg jeruk.

RANGKUMAN

1. Persamaan linear dua variabel adalah sebuah persamaan yang mempunyai dua variabel dengan masing-masing variabel memiliki pangkat tertinggi satu dan tidak ada perkalian di antara kedua variabel tersebut.
2. Himpunan penyelesaian dari PLDV adalah lebih dari satu penyelesaian.
3. SPLDV mempunyai penyelesaian tunggal.
4. Ada 3 cara untuk menyelesaikan SPLDV, yaitu :
   a. cara substitusi
   b. cara eliminasi
   c. cara grafik

Uji Kompetensi Bab 4

A Pilihan ganda

Berilah tanda silang (×) pada huruf a, b, c, atau d pada jawaban yang benar.

1. $2x + 5 = 6x - 27$, nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah ....
   a. 4 c. 8
   b. 6 d. 12

2. $\frac{4a - 2}{3} = 6$, nilai a yang memenuhi persamaan adalah ....
   a. 4 c. 6
   b. 5 d. 12

3. Nilai m yang memenuhi persamaan $\frac{2m - 4}{3} = \frac{3m - 8}{4}$ adalah ....
   a. 4 c. 8
   b. 6 d. 12

4. Nilai a yang memenuhi persamaan $\frac{12}{2a - 2} = \frac{16}{3a - 4}$ adalah ....
   a. 4 c. 8
   b. 6 d. 12

5. Dari persamaan $\frac{2}{x} + \frac{3}{x} + \frac{4}{x} + \frac{5}{x} = 7$, nilai x yang memenuhi adalah ....
   a. 2 c. 4
   b. 3 d. 5

6. Nilai x dan y yang memenuhi persamaan $2x + 3y = 40$ dan $6x - 2y = 10$ adalah ....
   a. 5 dan –5 c. 5 dan 15
   b. 5 dan 10 d. 5 dan 25

7. Diketahui himpunan titik {(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)}, persamaan yang memenuhi adalah ....
   a. $y + x = 0$ c. $y + 2x = 0$
   b. $y - x = 0$ d. $y - 2x = 0$

8. Titik (–5, 2) merupakan anggota dari persamaan ....
   a. $y = x + 3$ c. $y = -x + 1$
   b. $y = x + 7$ d. $y = 2x + 5$

9. Nilai x dari sistem persamaan $5x - 3y = 9$ dan $-2x - 5y = -16$ adalah ....
   a. 2 c. 5
   b. 3 d. 6

10. Nilai a dan b dari $2a - 3b = -8$ dan $3a + 5b = 26$ yang memenuhi adalah ....
    a. 2 dan 3 c. 3 dan 4
    b. 2 dan 4 d. 5 dan 6

11. Nilai x dan y dari sistem persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7$ dan $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$ adalah ....
    a. 5 dan 2 c. $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{5}$
    b. $\frac{1}{5}$ dan $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{3}$

12. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 10$ dan $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$, jumlah nilai x dan y adalah ....
    a. 6 c. 24
    b. 12 d. 36

13. Harga 5 apel dan 3 mangga adalah Rp11.000,00. Untuk 2 apel dan 4 mangga harganya adalah Rp10.000,00. Harga sebuah mangga adalah ....
    a. Rp1.000,00 c. Rp1.500,00
    b. Rp2.000,00 d. Rp500,00

14. Jika $3x + 2y = 6$ dan $5x + 4y = 11$ maka nilai x dan y dari sistem persamaan tersebut adalah ....
    a. 1 dan 2 c. 1 dan $1\frac{1}{2}$
    b. 2 dan $\frac{1}{2}$ d. $1\frac{1}{2}$ dan $2\frac{1}{2}$

15. $3y = 2x - 2$ dan $3x = 2y + 13$, nilai $x + y$ adalah ....
    a. 11 c. 13
    b. 12 d. 15

16. Ibu membawa 2 lembar uang Rp10.000,00. Jika ibu membeli 3 apel dan 4 mangga ia menerima uang kembalian sebesar Rp2.000,00. Jika ia membeli 2 apel dan 6 mangga uangnya kurang Rp2.000,00. Harga sebuah mangga adalah ....
    a. Rp3.000,00 c Rp1.000,00
    b. Rp2.000,00 d. Rp500,00

17. Jika $\frac{x - 2y}{3} = 2\frac{2}{3}$ dan $\frac{x + 2y}{2} = 8$ maka nilai x dan y adalah ....
    a. 2 dan 3 c. 12 dan 6
    b. 12 dan 12 d. 12 dan 2

18. Jika $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1$ dan $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 1\frac{3}{4}$, maka nilai x dan y adalah ....
    a. 2 dan 4 c. 4 dan 4
    b. 3 dan 4 d. 4 dan 2

19. Sebuah bilangan terdiri dari 2 digit. Jumlah angka-angka bilangan itu adalah 9. Jika angka-angka pada bilangan itu dipertukarkan akan didapat bilangan yang besarnya $\frac{3}{8}$ dari bilangan semula. Bilangan tersebut adalah ....
    a. 18 c. 64
    b. 36 d. 72

20. Harga 4 kaos dan 3 baju adalah Rp145.000,00 sedangkan harga 2 kaos dan 4 baju adalah Rp135.000,00. Jumlah harga 5 baju dan 5 kaos adalah ....
    a. Rp195.000,00 c. Rp212.500,00
    b. Rp202.500,00 d. Rp280.000,00

B Esai

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini.

1. Manakah yang merupakan persamaan linear dua variabel?
   a. $x + y = 5$
   b. $2x - y = 3$
   c. $2x^2 - 3x = 3$
   d. $y = 2x - 2$
   e. $5x - y^2 = 3$
   f. $x^2 - y = 2$

2. Manakah yang merupakan sistem persamaan linear dua variabel?
   a. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ y = 5x - 2 \end{cases}$
   c. $\begin{cases} x = z - y \\ y = 2x - 5 \end{cases}$
   d. $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 12 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$
   e. $\begin{cases} x^2 - y = p \\ x + y = r \end{cases}$
   f. $\begin{cases} x = 10 + y \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

3. Selesaikanlah SPLDV berikut dengan cara substitusi.
   a. $\begin{cases} 14x - 6y = 9 \\ 6x - 14y = 2 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} 5x + 6y = -6\frac{1}{2} \\ 5x - 9y = 2\frac{1}{5} \end{cases}$
   c. $\begin{cases} x = \frac{1}{4}(3y - 5) \\ y = \frac{1}{2}(3x + 2) \end{cases}$

4. Selesaikanlah SPLDV berikut dengan eliminasi.
   a. $\begin{cases} 11x - 3y = 23 \\ 5y - 2x = 58 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} 7y - 4x = 1 \\ 15x - 9y = -9\frac{1}{2} \end{cases}$
   c. $\begin{cases} \frac{1}{5}x - 3y = -1\frac{1}{2} \\ \frac{5}{6}x - 3y = 13\frac{1}{4} \end{cases}$

5. Selesaikanlah dengan cara grafik SPLDV berikut.

a. $\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ x - 4y = -6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 8x - 2y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{x + y}{3} = 3 \\ \dfrac{3x + 3}{5} = 1 \end{cases}$

6. Hitunglah nilai x, y, dan z.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

7. Dengan cara substitusi, hitunglah x dan y.

a. $\begin{cases} y + 3x = 4 \\ y - 4x = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y + 5x = 7 \\ 4y - 3x = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 5y = 18 \end{cases}$

8. Dengan cara eliminasi, hitunglah x dan y.

a. $\begin{cases} 2x = y + 5 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} - 2 = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}y = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{8}y = \dfrac{8}{3} \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3(x + y - 6) = -\dfrac{9}{4} \\ (x - y) + 4(8x - 3y) = \dfrac{185}{4} \end{cases}$

d. $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(3x - 6) + \dfrac{2}{5}(10y + 5x) = 10 \\ 2(x + 2y) - (x + 6y) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

9. Dengan cara grafik, hitunglah x dan y.

a. $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - y = 8 \\ 2x - y = 18 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2 - y = 8x \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3 - 2x = y \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + y = 20 \\ 5x + 2 = y \end{cases}$

10. Hitunglah nilai x dan y.

a. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$

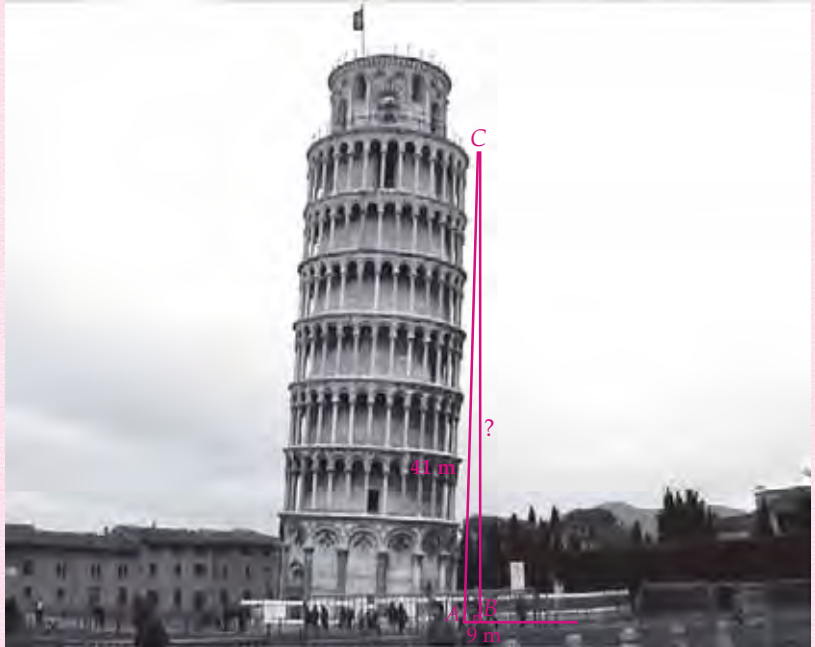
b. $\begin{cases} \dfrac{1}{12}x + \dfrac{4}{3}y = 8 \\ \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{5}y = 12 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{3} - \dfrac{3x - y}{2} = 14 \\ \dfrac{3x - 2y}{6} + \dfrac{4x - y}{8} = 8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x - 8) = y + 4 \\ \dfrac{1}{3}(3y + 4) = x - 5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \dfrac{x}{2y + 1} = 2 \\ \dfrac{y}{2x + 3} = 4 \end{cases}$

BAB 5

Dalil Pythagoras

Tujuan Pembelajaran

- Mengingat kembali kuadrat dan akar kuadrat suatu bilangan
- Menjelaskan dan menemukan dalil Pythagoras dan menggunakannya dalam pemecahan masalah.

Dalil Pythagoras banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya pada arsitektur. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar di atas dan penjelasan berikut.

Gambar di atas adalah bangunan Menara Pisa di Italia. Menara Pisa adalah sebuah bangunan besar yang memiliki kemiringan. Seperti yang terlihat pada gambar, kemiringan bangunan tersebut membentuk sebuah segitiga siku-siku. Dengan keterangan pada gambar, dapatkah kalian menentukan panjang sisi tegak BC tanpa harus mengukur langsung? Kalian akan dapat menyelesaikan masalah di atas setelah mempelajari bab ini.

Pada bab ini kalian juga akan menggunakan konsep dari bilangan kuadrat dan akar kuadrat. Kalian perlu mengingatnya kembali karena materi tersebut menjadi dasar untuk mempelajari materi pada bab ini.

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Hitunglah kuadrat bilangan berikut.
   a. $2^2 = ...$
   b. $5^2 = ...$
   c. $-5^2 = ...$
   d. $(-5)^2 = ...$
   e. $-(-5)^2 = ...$
2. Hitunglah akar kuadrat bilangan berikut.
   a. $\sqrt{49} = ...$
   b. $\sqrt{2a^2} = ...$
   c. $\sqrt{\frac{4}{9}} = ...$
   d. $\sqrt{3^2 + 4^2} = ...$

A Menjelaskan dan Menemukan Dalil Pythagoras

Masih ingatkah kalian pengertian kuadrat dan akar kuadrat yang telah kalian pelajari di kelas VII. Materi ini akan digunakan untuk pembahasan kali ini, yaitu dalil Pythagoras. Untuk itu, kalian harus menguasai materi kuadrat dan akar kuadrat. Untuk mengingat kembali, perhatikan pembahasan berikut.

1 Kuadrat suatu Bilangan

Coba kalian perhatikan bentuk berikut.

$4 \times 4 = 4^2$

$6 \times 6 = 6^2$

$-16 \times -16 = (-16)^2$

Bentuk di atas adalah bentuk kuadrat yang secara umum dapat ditulis $a^2 = a \times a$. Bilangan kuadrat adalah bilangan yang merupakan hasil pengkuadratan, seperti 4, 9, 16, 25, 36 dan seterusnya. Jika a adalah suatu bilangan dan $p = a \times a = a^2$ maka p dikatakan *bilangan kuadrat*. Jadi, *bilangan kuadrat* adalah bilangan bulat yang merupakan hasil kali dari bilangan yang sama.

$-7^2 \neq (-7)^2$, karena

$-7^2 = -(7 \times 7) = -49$

$(-7)^2 = (-7)(-7) = 49$

2 Nilai Kuadrat suatu Bilangan

Kuadrat suatu bilangan dapat ditentukan dengan cara menghitung, yaitu dengan mengalikan bilangan itu dengan dirinya sendiri.

Contoh SOAL

1. Tentukan nilai dari:
   a. 7^2
   b. 35^2
   c. $\left(\frac{4}{3}\right)^2$
   d. $(4a)^2$

   Penyelesaian:
   a. $7^2 = 7 \times 7 = 49$
   b. $35^2 = 35 \times 35 = 1.225$
   c. $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$
   d. $(4a)^2 = 4a \times 4a = 16a^2$
2. Jika $111^2 = 12.321$, tentukan nilai dari:
   a. $(11,1)^2$
   b. 1.110^2

Penyelesaian:

a. $(11,1)^2 = \left(\frac{111}{10}\right)^2$

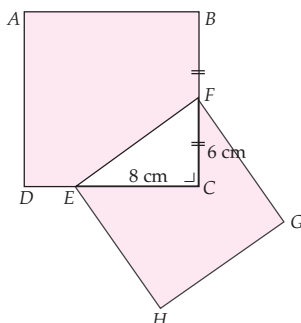
$= \frac{111^2}{10^2} = \frac{12.321}{100} = 123,21$

b. $1.110^2 = (111 \times 10)^2$

$= 111^2 \times 10^2$

$= 12.321 \times 100$

$= 1.232.100$

3. Perhatikan gambar di bawah.

ABCD dan *EFGH* masing-masing adalah persegi dengan panjang rusuk 12 cm dan 10 cm. Hitunglah luas daerah yang diarsir dan apakah luasnya adalah bilangan kuadrat?

Penyelesaian:

Luas Δ siku-siku *CEF* $= \frac{1}{2}$ (alas × tinggi)

$= \frac{1}{2}(8 \times 6)$

$= 24 \text{ cm}^2$

Luas daerah arsiran

= (luas □ *ABCD* – luas Δ*CEF*) +
(luas □ *EFGH* – luas Δ*CEF*)

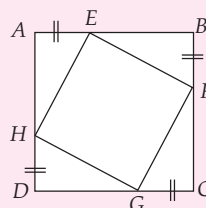
$= (12^2 - 24) + (10^2 - 24)$

$= 144 - 24 + 100 - 24$

$= 196 = 14 \times 14 = 14^2 \text{ cm}^2$

Jadi, luas daerah yang diarsir 196 cm^2 dan merupakan bilangan kuadrat.

LATIHAN 1

1. Tentukan nilai dari:
   a. 9^2
   b. $(-4)^2$
   c. -4^2
   d. $-2,5^2$
2. Jika $a = 6$, $b = 3$, dan $c = -5$, hitunglah:
   a. $a^2 + 2b^2$
   b. $4a^2 - 2b^2 - 3c^2$
   c. $-a^2 + 3b^2 - c^2$
   d. $3a^2 - 5c^2$
3. Jika $222^2 = 49.284$, hitunglah nilai dari:
   a. $22,2^2$
   b. $\frac{22,2^2}{10^2}$
   c. $222^2 \times 10^3$
4. Uraikanlah bentuk berikut.
   a. $(2a)^2$
   b. $(3ab)^2$
   c. $(4abc)^2$
   d. $(-2ab)^2$
   e. $(-3abcd)^2$
   f. $(-45abc)^2$
5. Uraikanlah bentuk berikut.
   a. $\left(\frac{3a}{b^2}\right)^2$
   b. $\frac{-2a^2}{(3b)^2}$
   c. $\frac{(-4abc)^2}{(2ab)^2}$
   d. $\left(\frac{4a}{5b}\right)^2$
6. Jika panjang sisi □*ABCD* adalah 12, panjang $AE = BF = CG = DH = 4$, berapakah luas *EFGH*?

7. Jika $a^2 = 44,44$; hitunglah nilai dari:
   a. $10a^2$
   b. $\frac{a^2}{10^2}$
   c. $(10a)^2$
   d. $\left(\frac{a}{10}\right)^2$

Coba kalian cari dari buku-buku yang ada di perpustakaanmu mengenai cara menentukan kuadrat suatu bilangan dengan menggunakan tabel. Diskusikan dengan temanmu hasil yang kalian peroleh.

3 Pengertian Akar Kuadrat suatu Bilangan

Pada pembicaraan sebelumnya kalian telah mengetahui tentang kuadrat suatu bilangan, misalnya $2^2 = 4$ dan $3^2 = 9$. Selanjutnya kalian akan dikenalkan dengan kebalikan operasi kuadrat, yaitu ***akar kuadrat.***

Apabila kuadrat dari 3 adalah 9 maka akar kuadrat dari 9 adalah 3 dan ditulis $\sqrt{9} = 3$. Dari pernyataan di atas, menurut kalian, bagaimanakah cara menentukan nilai akar kuadrat suatu bilangan positif?

Menentukan nilai akar suatu bilangan positif adalah mencari bilangan yang apabila dikuadratkan hasilnya sama dengan bilangan yang dicari akarnya. Dengan kata lain, jika $b = \sqrt{a} \Rightarrow b^2 = a$. Coba kalian selidiki dengan mengganti $b = 2$, $b = 3$, dan seterusnya.

Setiap bilangan positif $a^2 = p$ mempunyai sebuah akar kuadrat positif dilambangkan dengan $\sqrt{p}$ dan sebuah akar kuadrat negatif dilambangkan dengan $-\sqrt{p}$. Misalkan $a^2 = 49$ maka 49 mempunyai dua akar, yaitu 7 dan –7 karena $7^2 = 49$ dan $(-7)^2 = 49$.

Setiap bilangan bulat positif yang bukan bilangan prima atau mempunyai faktor akar kuadrat selain 1, akar-akar kuadratnya dapat disederhanakan dengan menggunakan sifat-sifat berikut.

(i) $\sqrt{A \times B} = \sqrt{A} \times \sqrt{B}$, $A \geq 0$, $B \geq 0$

(ii) $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$, $A \geq 0$, $B \neq 0$

(iii) $A\sqrt{B} + A\sqrt{C} = A\left(\sqrt{B} + \sqrt{C}\right)$, $B \geq 0$, $C \geq 0$

(iv) $\sqrt{A} \times \sqrt{A} = A$, $A \geq 0$

Jika b bilangan bulat positif dan $b^2 = a$ maka b adalah akar kuadrat a, dilambangkan dengan $\pm\sqrt{a}$.

Contoh SOAL

1. Sederhanakanlah bentuk berikut.

   a. $\sqrt{8}$

   b. $\sqrt{240}$

   c. $3\sqrt{10\frac{6}{9}}$

   Penyelesaian:

   a. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

   b. $\sqrt{240} = \sqrt{16} \times \sqrt{15} = 4\sqrt{15}$

   c. $3\sqrt{10\frac{6}{9}} = 3 \times \sqrt{\frac{96}{9}}$

   $= 3 \times \sqrt{96 \times \frac{1}{9}}$

   $= 3 \times \sqrt{96} \times \sqrt{\frac{1}{9}}$

   $= 3 \times \sqrt{16 \times 6} \times \sqrt{\frac{1}{9}}$

   $= 3 \times \sqrt{16} \times \sqrt{6} \times \sqrt{\frac{1}{9}}$

$= 3 \times 4\sqrt{6} \times \frac{1}{3}$

$= 4\sqrt{6}$

2. Sebuah persegi panjang mempunyai luas 36 cm^2. Jika panjang = 3 kali lebar, tentukanlah panjangnya.

   Penyelesaian:

   Misalkan x adalah lebar persegi panjang, maka:

   $$\begin{aligned} \text{Luas} &= \text{panjang} \times \text{lebar} \\ 36 &= 3x \times x \Leftrightarrow 36 = 3x^2 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^2 &= \frac{36}{3} \\ &= 12 \\ x &= \sqrt{12} \\ &= 2\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

   Jadi, lebar persegi panjang adalah $2\sqrt{3}$ cm, dan

   panjang persegi panjang $= 3 \times 2\sqrt{3}$

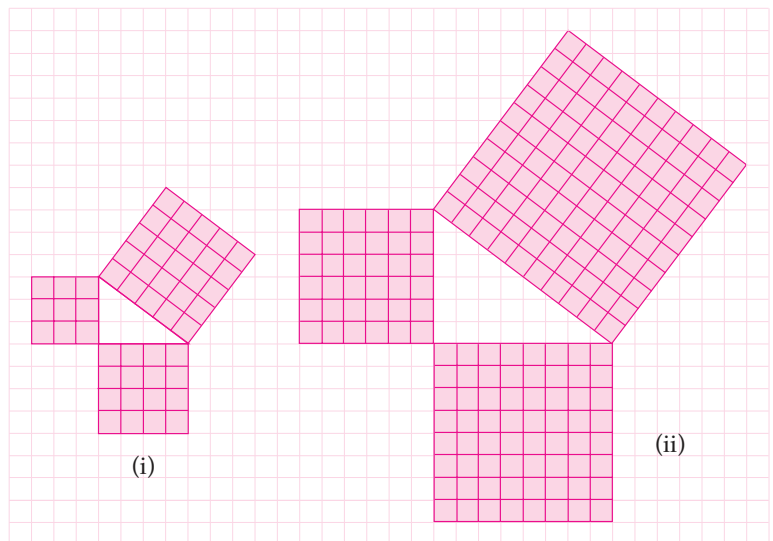
   $= 6\sqrt{3}$ cm.

LATIHAN 2

1. Sederhanakanlah.
   a. $\sqrt{20}$
   b. $2\sqrt{72}$
   c. $3\sqrt{112}$
   d. $\sqrt{0,09}$
   e. $3\sqrt{0,16}$
   f. $0,1\sqrt{0,25}$

2. Sederhanakanlah.
   a. $8\sqrt{6\frac{5}{64}}$
   b. $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{72}}$
   c. $\frac{\sqrt{0,12}}{\sqrt{0,24}}$
   d. $\frac{\sqrt{0,54}}{3\sqrt{0,04}}$

4 Dalil Pythagoras

Untuk memahami dalil Pythagoras, tentunya kalian harus menemukan sendiri konsep dari dalil Pythagoras. Tahukah kamu cara menemukan dalil Pythagoras itu? Untuk memahami apa yang dimaksud dengan dalil Pythagoras, coba kalian perhatikan tugas yang terdapat pada Gambar 5.1 di bawah ini.

Gambar 5.1 Segitiga siku-siku yang dibatasi oleh tiga bidang persegi

Untuk menemukan dalil Pythagoras, cobalah kalian salin dan isi tabel berikut pada bukumu sesuai dengan informasi pada Gambar 5.1.

Gambar	Luas persegi pada sisi siku-siku	Luas persegi pada sisi siku-siku lain	Luas persegi pada sisi miring
(i)	3 $3 \times 3 = 3^2 =$	4 $4 \times 4 = 4^2 =$	5 $5 \times 5 = 5^2 =$
(ii)	6 .... a $a \times a = a^2$	.... b	.... c ....

Hubungan apakah yang kalian temukan antara luas □ pada sisi miring dengan kedua luas □ pada sisi siku-sikunya?

Hubungan apakah yang kalian temukan antara kuadrat sisi miring dengan kedua kuadrat sisi siku-sikunya?

Setelah kalian mengerjakan seluruh soal di atas, cobalah bandingkan jawabannya dengan teman-teman yang lain dan amatilah jawaban dari soal-soal tersebut. Selanjutnya diskusikan dengan teman-temanmu, hal apa yang dapat kalian simpulkan dari jawaban soal-soal itu? Jika kesimpulan yang kalian dapatkan sesuai dengan pernyataan yang dibuat oleh penemunya, yaitu Pythagoras maka kalian telah menemukan dalil Pythagoras.

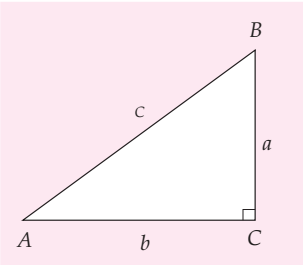
Dalil Pythagoras

Pada suatu segitiga siku-siku, luas persegi pada sisi miringnya sama dengan jumlah luas persegi-persegi pada kedua sisi siku-sikunya atau dapat diartikan pula jumlah dari kuadrat kedua sisi siku-siku suatu segitiga siku-siku sama dengan kuadrat panjang sisi miringnya *(hypotenusa)*.

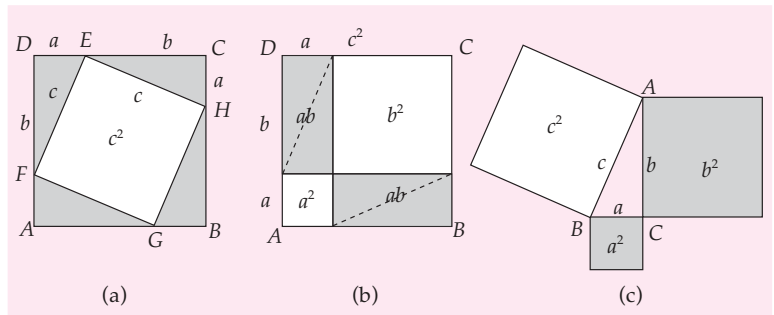
5 Dalil Pythagoras dalam Bentuk Rumus

Suatu segitiga siku-siku terdiri atas satu sisi miring dan dua sisi siku-siku. Sisi depan sudut siku-siku adalah *hypotenusa*, biasa disebut sisi miring, yaitu sisi terpanjang pada suatu segitiga siku-siku.

Gambar 5.2 menunjukkan segitiga siku-siku *ABC* dengan sudut siku-siku di *C*.

Pada segitiga *ABC* dengan sisi siku-siku *AC* dan *BC* serta sisi miring *AB*, berlaku dalil Pythagoras $AB^2 = BC^2 + AC^2$, dengan *AB* sisi terpanjang *(hypotenusa)* atau dapat ditulis dalam bentuk berikut.

Gambar 5.2 Segitiga siku-siku *ABC*

$c^2 = a^2 + b^2$
$a^2 = c^2 - b^2$
atau
$b^2 = c^2 - a^2$

Untuk menunjukkan pembuktian dalil Pythagoras di atas, perhatikan penjelasan gambar berikut.

Gambar 5.3 Pembuktian dalil Pythagoras: (a) Luas persegi $EFGH = c^2 = (a + b)^2 - 2ab$; (b) Luas daerah tidak diarsir $= a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, dan (c) $c^2 = a^2 + b^2$

Perhatikan Gambar 5.3(a). Sebuah □*ABCD* dengan panjang rusuk $(a + b)$, yang di dalamnya terdapat □*EFGH* dengan panjang rusuk c dan titik-titik sudut □*EFGH* menyinggung sisi □*ABCD* sehingga luas □*ABCD* dan □*EFGH* diperoleh sebagai berikut.

Luas □*ABCD* $= (a + b)(a + b)$

$= a^2 + 2ab + b^2$

Luas □*EFGH* $= c^2$

Untuk menentukan luas daerah yang tidak diarsir (c^2) adalah sebagai berikut.

c^2 = Luas □*ABCD* – 4 × luas segitiga siku-siku yang diarsir

$$c^2 = (a + b)(a + b) - 4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

$$= (a + b)^2 - 2ab \quad \text{.......... (1)}$$

Perhatikan Gambar 5.3 (b). Empat buah segitiga dipasangkan sedemikian rupa sehingga membentuk 2 buah persegi panjang dengan ukuran $a \times b$ yang luasnya masing-masing adalah ab.

Luas daerah yang tidak diarsir adalah $(a^2 + b^2)$ atau

luas □*ABCD* – 2 × luas ▭ yang diarsir $= (a + b)^2 - 2(ab)$

sehingga terdapat hubungan sebagai berikut.

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2(ab) \quad \text{.......... (2)}$$

Substitusi persamaan (1) ke (2) diperoleh:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Jadi, terbukti bahwa pada Gambar 5.3 (c) segitiga ABC dengan sudut siku-siku di C dan $a < b < c$ serta c sisi miring *(hypotenusa)* berlaku rumus dalil Pythagoras.

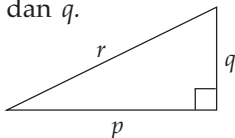
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Selanjutnya, coba kalian tuliskan rumus Pythagoras untuk segitiga ABC yang memiliki sudut siku-siku di A dan di B, dengan cara menggambarkan segitiganya terlebih dahulu.

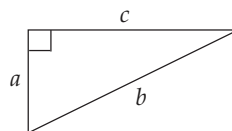
Contoh SOAL

1. Nyatakan r dalam p dan q.

Penyelesaian:

$r^2 = p^2 + q^2$

2. Tentukan nilai c.

Penyelesaian:

$c^2 = b^2 - a^2$

Tahukah kalian siapa yang menemukan dalil Pythagoras? Coba kalian cari informasinya dari buku-buku di perpustakaan sekolahmu atau internet. Bandingkan hasilmu dengan hasil temanmu.

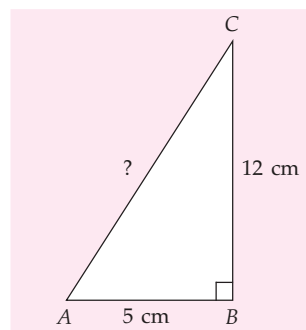
Cara Menggunakan Dalil Pythagoras

Sekarang, kalian tentunya sudah memahami dalil Pythagoras. Marilah gunakan dalil Pythagoras yang telah dipelajari untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan segitiga siku-siku. Untuk lebih jelasnya, perhatikanlah penjelasan berikut.

Perhitungan Panjang Sisi Segitiga Siku-Siku

Pada Gambar 5.4, ΔABC adalah segitiga siku-siku dengan $\angle B = 90°$. Jika panjang AB = 5 cm dan BC = 12 cm, panjang AC dapat ditentukan dengan menggunakan dalil Pythagoras.

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 \\ &= 169 \\ AC &= \sqrt{169} \\ AC &= 13 \end{aligned}$$

Jadi, panjang AC adalah 13 cm.

Gambar 5.4 Segitiga siku-siku ABC, dengan $\angle B = 90°$

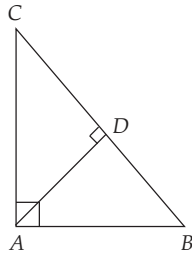
Contoh SOAL

Diketahui ΔABC dengan sisi $AB = 12$ cm dan $AC = 16$ cm, serta $AD \perp BC$.

Hitunglah:

a. BC;

b. AD;

c. BD.

Penyelesaian:

a. Untuk menghitung BC kalian dapat menggunakan dalil Pythagoras pada ΔABC sebagai berikut.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$= 12^2 + 16^2$$
$$= 144 + 256$$
$$= 400$$
$$BC = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$$

b. Untuk menentukan AD kalian dapat menggunakan luas segitiga.

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{AB \times AC}{2}$$

atau

$$= \frac{AD \times BC}{2}$$

maka:

$$\frac{AB \times AC}{2} = \frac{AD \times BC}{2}$$
$$\Leftrightarrow (AB)\,(AC) = (AD)\,(BC)$$
$$\Leftrightarrow (12)(16) = (AD)\,(20)$$
$$AD = \frac{192}{20} = 9{,}6 \text{ cm}$$

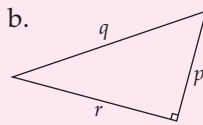
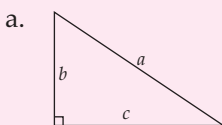
c. Untuk menentukan BD kalian gunakan dalil Pythagoras pada ΔABD.

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$BD^2 = AB^2 - AD^2$$
$$= 12^2 - 9{,}6^2$$
$$= 144 - 92{,}16 = 51{,}84$$
$$BD = \sqrt{51{,}84} = 7{,}2 \text{ cm}$$

LATIHAN 3

1. Gunakan dalil Pythagoras untuk menentukan panjang sisi miring dari segitiga siku-siku berikut.

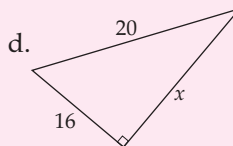
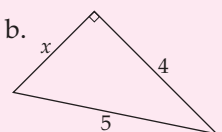
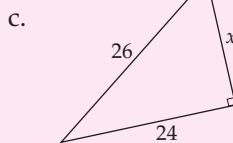
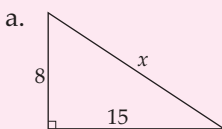
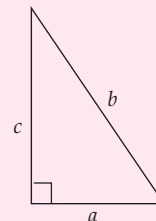
a.

b.

2. Dengan menggunakan dalil Pythagoras, hitunglah nilai x dari segitiga siku-siku berikut ini.

a.

c.

b.

d.

3. Perhatikan segitiga siku-siku berikut.

Salin dan lengkapi tabel di bawah ini.

No.	a	b	c
(i)	....	13	12
(ii)	4	9	....
(iii)	3	....	2
(iv)	12	....	5
(v)	....	40	24

2 Kebalikan Dalil Pythagoras dan Tripel Pythagoras

a. Kebalikan Dalil Pythagoras

Pada pembahasan dalil Pythagoras sebelumnya, sudah kita buktikan bahwa pada segitiga siku-siku ABC di samping, dengan $\angle C$ adalah siku-siku, berlaku

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Gambar 5.5 Segitiga siku-siku ABC, dengan $\angle C = 90°$

Satu hal yang perlu diperhatikan bahwa penggunaan dalil Pythagoras hanya berlaku untuk *segitiga siku-siku*.

Selanjutnya, jika diberikan sisi-sisi suatu segitiga, akan dibuktikan apakah segitiga itu *siku-siku* atau *tidak*.

Untuk membuktikan suatu segitiga siku-siku atau tidak, digunakan kebalikan dalil Pythagoras.

> Jika suatu segitiga mempunyai panjang sisi-sisinya a, b, c dan $a^2 + b^2 = c^2$ maka segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku dengan sudut siku-siku di depan sisi c.

Contoh SOAL

ΔPQR memiliki panjang sisi $QR = 3$ cm, $PR = 4$ cm, dan $PQ = 5$ cm.

a. Apakah ΔPQR merupakan Δ siku-siku?

b. Tentukan sudut siku-sikunya.

Penyelesaian:

a. Untuk membuktikan ΔPQR siku-siku, tentukan sisi paling panjang dan sisi lainnya. Sisi terpanjang adalah $PQ = 5$ cm, dan sisi-sisi lainnya adalah $QR = 3$ cm, $PR = 4$ cm. Berdasarkan rumus Pythagoras, kuadrat sisi terpanjang sama dengan jumlah kuadrat sisi lainnya.

$PQ^2 = 5^2 = 25$

$QR^2 + PR^2 = 3^2 + 4^2$

$= 9 + 16 = 25$

Jadi, $PQ^2 = QR^2 + PR^2$ atau dengan kata lain ΔPQR adalah segitiga siku-siku

b. Sudut siku-sikunya di depan sisi PQ, yaitu $\angle R$.

b. Tiga Bilangan yang Merupakan Tripel Pythagoras

Tiga bilangan a, b, c dengan $a < b < c$ dikatakan tripel Pythagoras jika memenuhi hubungan $c^2 = a^2 + b^2$.

Bentuk tigaan Pythagoras atau tripel Pythagoras dapat digunakan untuk membuktikan apakah segitiga tersebut siku-siku atau tidak.

Tripel Pythagoras dari suatu bilangan bulat sembarang dapat ditentukan sebagai berikut.

Jika m dan n sembarang bilangan bulat positif dengan $m > n$ maka bilangan-bilangan $m^2 + n^2$, $2mn$, dan $m^2 - n^2$ adalah bentuk dari tripel Pythagoras.

m	n	$m^2 + n^2$	$m^2 - n^2$	$2mn$
2	1	5	3	4
3	1	10	8	6
3	2	13	5	12
4	2	20	12	16

Contoh SOAL

Apakah tiga bilangan pada soal di bawah ini merupakan tripel Pythagoras?

a. 4, 5, dan 6 b. 6, 8, dan 10

Penyelesaian:

a. $4 < 5 < 6$, maka

$6^2 = 36$

$4^2 + 5^2 = 16 + 25$

$= 41$

$6^2 \neq 4^2 + 5^2$

Oleh karena kuadrat sisi terpanjang tidak sama dengan jumlah kuadrat sisi lainnya maka 4, 5, dan 6 bukan tripel Pythagoras.

b. $6 < 8 < 10$, maka

$10^2 = 100$

$6^2 + 8^2 = 36 + 64$

$= 100$

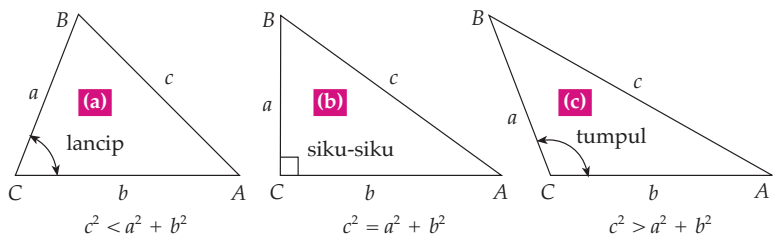
Oleh karena $10^2 = 6^2 + 8^2$ maka 6, 8, 10 adalah tripel Pythagoras.

KEGIATAN

Gunakanlah bentuk tripel Pythagoras $m^2 + n^2$, $2mn$, dan $m^2 - n^2$. Kamu boleh memilih sembarang bilangan bulat positif (masing-masing sebanyak 5 bilangan) untuk m dan n, dengan $m > n$. Setelah itu, buktikan hubungan bilangan tripel Pythagoras tersebut melalui gambar, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.1. Guntinglah kertas berpetak sesuai dengan bilangan yang dimaksud dan tempelkan pada buku tugasmu. Perhatikan, apakah bilangan-bilangan itu memenuhi dalil Pythagoras?

c. Jenis Segitiga

Hubungan nilai c^2 dengan $(a^2 + b^2)$ dapat digunakan untuk menentukan apakah suatu segitiga *siku-siku* atau *tidak*.

Perhatikanlah Gambar 5.6. Untuk $c^2 = a^2 + b^2$, segitiganya adalah *segitiga siku-siku*. Apabila nilai c bertambah besar, sementara nilai a dan b tetap maka $c^2 > a^2 + b^2$. Akibatnya $\angle C$ akan semakin besar sehingga segitiga tersebut menjadi segitiga tumpul (Gambar 5.6 (c)). Apabila nilai c semakin kecil, sementara a dan b tetap maka $c^2 < a^2 + b^2$. Akibatnya $\angle C$ akan semakin kecil sehingga segitiga tersebut menjadi segitiga lancip (Gambar 5.6 (a)).

Gambar 5.6 Perubahan sudut akibat perubahan sisi c : (a) segitiga lancip, (b) segitiga siku-siku, dan (c) segitiga tumpul

Jika a, b, dan c adalah panjang sisi-sisi suatu segitiga dengan:

a. $c^2 > a^2 + b^2$ maka segitiga tersebut merupakan segitiga tumpul;

b. $c^2 = a^2 + b^2$ maka segitiga tersebut merupakan segitiga siku-siku;

c. $c^2 < a^2 + b^2$ maka segitiga tersebut merupakan segitiga lancip.

Sumber: About New Zealand. Ministry of external Relations.

Gambar 5.7 Layar dari perahu yang berbentuk segitiga siku-siku

Contoh SOAL

Tentukan jenis segitiga berikut jika sisinya:

a) 3, 4, 6 c) 8, 9, 10

b) 3, 4, 5 d) 4, 7, 11

Penyelesaian:

a) Untuk sisi segitiga 3, 4, 6

$6^2 > 3^2 + 4^2$

$36 > 9 + 16$

$36 > 25$

Jenis segitiga adalah segitiga tumpul.

b) Untuk sisi segitiga 3, 4, 5

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$25 = 9 + 16$

$25 = 25$

Jenis segitiganya adalah segitiga siku-siku.

c) Untuk sisi segitiga 8, 9, 10.

$10^2 < 8^2 + 9^2$

$100 < 64 + 81$

$100 < 145$

Jenis segitiga adalah segitiga lancip

d) Untuk sisi segitiga 4, 7, 11

$11^2 > 4^2 + 7^2$

$121 > 16 + 49$

$121 > 65$

Segitiga dengan sisi 4, 7, dan 11 berdasarkan aturan yang telah dijelaskan sebelumnya adalah segitiga tumpul. Akan tetapi, berdasarkan aturan melukis segitiga, segitiga dengan sisi 4, 7, dan 11 tidak dapat dilukis menjadi segitiga. Dengan demikian segitiga dengan sisi 4, 7, dan 11 bukanlah segitiga tumpul karena tidak dapat dilukis menjadi segitiga.

Misal sisi-sisi segitiga a, b, dan c, dengan $a < c$ dan $b < c$. Segitiga dapat dilukis dengan syarat $a - b < c < a + b$

LATIHAN 4

1. Tentukanlah jenis segitiga berikut (lancip, siku-siku, atau tumpul), jika sisi-sisinya:

   a. 4, 5, 7 f. $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$

   b. $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e. 4, 8, 10

   c. 0,3; 0,4; 0,5 f. 11, 12, 14

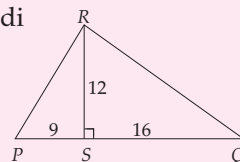
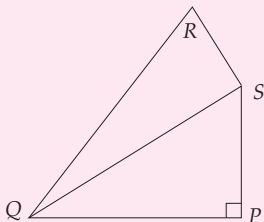
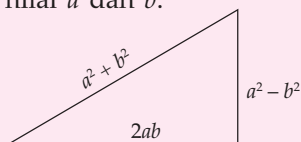
2. Manakah di antara pasangan bilangan berikut yang merupakan *tripel Pythagoras*?

   a. 9, 12, 15 c. 34, 35, 69

   b. 8, 10, 12 d. $3n$, $4n$, $5n$

   e. 5, 12, 13 g. $18n$, $15n$, $17n + 1$

   f. 13, 14, 15 h. $11n$, $60n - 1$, $61n$

3. Perhatikan gambar di samping ini. Tentukan PR dan RQ agar ΔPQR siku-siku.

4. Perhatikan bagian segi empat $PQRS$ di bawah ini. Sisi PS = 6 cm, PQ = 7 cm, SR = 4 cm dan $QR = \sqrt{69}$. Apakah $\angle QSR = 90°$?

5. Tentukan x dari segitiga siku-siku di bawah ini jika:
   a. sisi terpendek 14, sisi-sisi lainnya $x + 1$ dan $x + 3$
   b. sisi terpendek 4, sisi-sisi lainnya x dan $x + 1$
6. a dan b bilangan asli dan $a > b$. Jika 12, 16, 20 adalah tripel Phythagoras, tentukanlah nilai a dan b.

7. Isilah kolom A dan kolom B dengan sembarang bilangan m dan n, dengan $m > n$. Kemudian lengkapilah kolom C, D, dan E, sehingga bilangan-bilangan yang ada di kolom C, D, dan E menyatakan bilangan tripel Phythagoras.

A	B	C	D	E
m	n	$m^2 + n^2$	$m^2 - n^2$	$2mn$
4	3	25	7	24
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

8. Bilangan-bilangan berikut merupakan panjang sisi-sisi sebuah segitiga. Manakah dari tigaan tersebut yang merupakan sisi-sisi segitiga siku-siku.
   a. 3, 6, 9
   b. 8, 15, 15
   c. 9, 15, 17
   d. $\sqrt{3}$, 2, 5

Tugas Siswa

Jika n adalah bilangan bulat positif maka $a = 2n + 1$, $b = 2n^2 + 2n$, dan $c = 2n^2 + 2n + 1$, buktikan bahwa a, b, c adalah tripel Phythagoras.

3 Segitiga-Segitiga Istimewa

Segitiga-segitiga istimewa yang dimaksud adalah segitiga siku-siku yang memuat sudut-sudut istimewa yang besarnya antara lain 30°, 45°, dan 60°.

a. Segitiga Istimewa dengan Sudut 45°, 45° dan 90°

Gambar 5.8 Segitiga dengan sudut 45° – 45° – 90°

Gambar 5.8 adalah ΔABC dengan $\angle A = 45°$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 90°$. Segitiga ABC adalah segitiga siku-siku dengan sisi siku-siku AC dan BC serta sisi miringnya AB. Jika pada segitiga ABC, panjang sisi siku-sikunya $AC = BC = a$ maka panjang sisi miringnya adalah:

$$AB = \sqrt{a^2 + a^2}$$
$$= a\sqrt{2}$$

Sehingga diperoleh perbandingan sisi-sisinya, yaitu $AC : BC : AB = a : a : a\sqrt{2}$.

Pada segitiga istimewa dengan sudut 45°, 45° dan 90°, panjang sisi miring adalah $\sqrt{2}$ kali panjang sisi lain.

Contoh SOAL

1. Pada ΔABC siku-siku sama kaki, $\angle C = 90°$ dan $AB = 12\sqrt{2}$ cm. Hitunglah panjang AC.

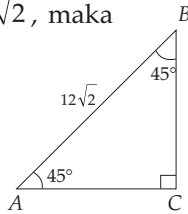
   Penyelesaian:

   $AC : BC : AB = 1 : 1 : \sqrt{2}$, maka

   $AC : AB = 1 : \sqrt{2}$

   $AC : 12\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$

   $AC \times \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

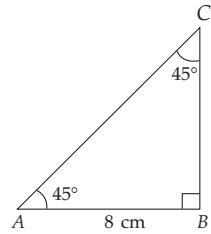
   $$AC = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 12 \text{ cm}$$

2. ΔABC adalah siku-siku sama kaki, $\angle B = 90°$, $AB = 8$ cm. Hitunglah AC dan BC.

   Penyelesaian:

   $BC = AB = 8$

   $AB : AC = 1 : \sqrt{2}$

   $8 : AC = 1 : \sqrt{2}$

   $AC = 8\sqrt{2}$ cm

b. Segitiga Istimewa dengan Sudut 30°, 60° dan 90°

Segitiga siku-siku yang sudut lancipnya 30° dan 60° disebut segitiga 30° – 60° – 90°.

Perhatikan Gambar 5.9. Segitiga ABC siku-siku di C dengan sisi miring AB dan sisi siku-sikunya AC dan BC, serta $\angle A = 30°$, $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$.

Gambar 5.9 ΔABC dibagi menjadi ΔBCD dan ACD

Kita akan buktikan bahwa pada segitiga siku-siku yang sudut-sudutnya 30° dan 60°, perbandingan sisi terpendek dan sisi lainnya adalah $1 : 2 : \sqrt{3}$.

Dari C tarik garis CD dengan $\angle BCD = 60°$, sehingga terbentuk segitiga sama sisi BCD dan segitiga sama kaki ACD.

Perhatikan ΔBCD. Pada segitiga sama sisi BCD, semua sisi sama panjang, sehingga $BC = CD = DB$. Jika $BC = a$ maka $BD = a$.

Perhatikan ΔACD. Pada segitiga sama kaki ACD, $CD = AD$. Jika $CD = a$ maka $AD = a$.

Gambar 5.10 Segitiga dengan sudut 30° – 60° – 90°

Dari uraian di atas diperoleh panjang sisi-sisi ΔABC, yaitu:

$BC = a$,

$$AB = AD + BD = a + a = 2a$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

Perbandingan sisi-sisi pada segitiga istimewa dengan sudut 30°, 60° dan 90° yaitu $BC : AC : AB = a : a\sqrt{3} : 2a$.

Pada segitiga istimewa dengan sudut 30°, 60°, dan 90°, panjang sisi miring adalah 2 kali sisi terpendek dan panjang sisi lainnya adalah $\sqrt{3}$ kali sisi terpendek.

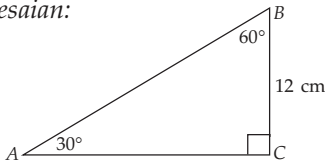
Math Quiz

Cobalah kamu buktikan dengan teman-temanmu bahwa jumlah sudut-sudut selain siku-siku dari setiap segitiga siku-siku selalu bernilai 90°. Apa yang dapat kamu simpulkan dari pembuktian tersebut?

Contoh SOAL

Pada ΔABC, $\angle B = 60°$ dan $\angle A = 30°$. Panjang $BC = 12$ cm, hitunglah panjang:

a) AC b) AB

Penyelesaian:

a) $AC : BC = \sqrt{3} : 1$

$AC : 12 = \sqrt{3} : 1$

$AC = 12\sqrt{3}$ cm

b) $AB : BC = 2 : 1$

$AB : 12 = 2 : 1$

$AB = 24$ cm

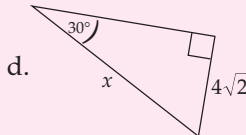
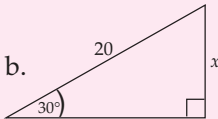
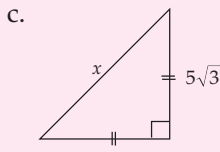
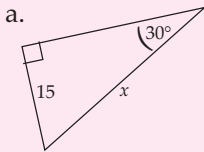
LATIHAN 5

1. Tentukan nilai x dari tiap segitiga berikut.

a.

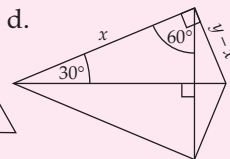
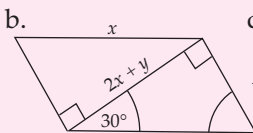
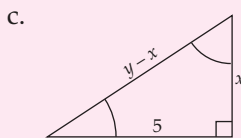
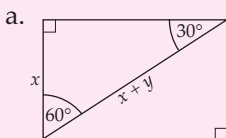
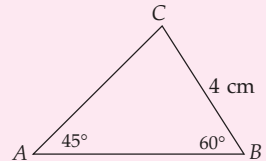
c.

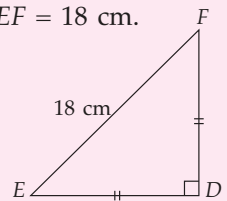
b.

d.

2. Tentukan nilai x dan y dari bangun-bangun datar yang diberikan.

a.

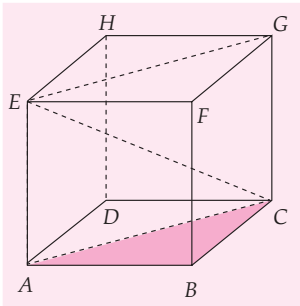
c.

b. d.

3. Dari ΔABC di bawah ini, hitunglah:
   a. panjang AB
   b. panjang AC
   c. keliling ΔABC
   d. luas ΔABC

4. Segitiga ABC dengan $\angle A = 45°$, $\angle B = 120°$, dan panjang $BC = 10$ cm.
   a. Gambarlah segitiga ABC tersebut.
   b. Hitunglah panjang AB dan AC.

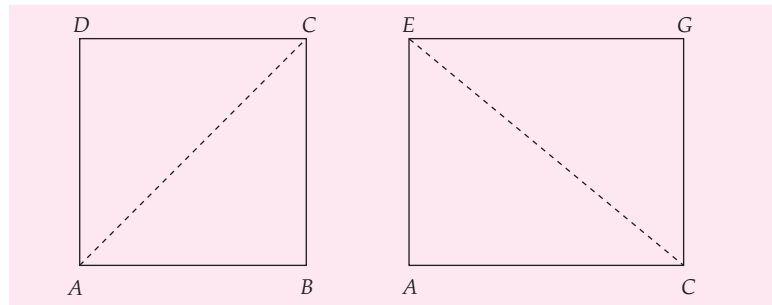
5. Segitiga DEF dengan $EF = 18$ cm. Tentukanlah:
   a. panjang DE
   b. keliling ΔDEF
   c. luas ΔDEF

6. Sebuah segitiga PQR dengan $\angle Q = 120°$, $\angle P = 30°$, dan $PR = 12$. Hitunglah QR dan PQ.

4 Diagonal Bidang dan Diagonal Ruang

Dalil Pythagoras sangat berguna dan sering dipakai pada bangun datar dan bangun ruang. Pada bangun ruang, seperti kubus dan balok, dalil Pythagoras digunakan untuk menentukan panjang rusuk, panjang diagonal bidang, panjang diagonal ruang dan lainnya. Sebelum kamu mencoba menentukan panjang diagonal sisi/bidang dan diagonal

ruang dari kubus dan balok, ada baiknya kalian mengingat kembali, manakah yang disebut diagonal sisi dan diagonal ruang pada kedua bangun tersebut.

Gambar 5.11 Kubus *ABCD.EFGH*

Pada Gambar 5.11, *AC*, *CF*, dan *AH* adalah diagonal sisi atau diagonal bidang. *AB*, *BC*, dan *BF* adalah rusuk dan *EC* adalah diagonal ruang. Sekarang, *coba kalian sebutkan semua rusuk, diagonal bidang dan diagonal ruang dari bangun kubus ABCD.EFGH tersebut.*

Untuk menentukan diagonal ruang dan diagonal bidang dari kubus *ABCD.EFGH* pada Gambar 5.11, kalian harus menggambar sisi-sisi kubus itu lebih sederhana ke dalam bidang datar sebagai berikut.

Gambar 5.12 *AC* merupakan diagonal bidang dan *EC* merupakan diagonal ruang kubus *ABCD. EFGH*

Pada Gambar 5.11, *AC* adalah diagonal bidang dan *EC* adalah diagonal ruang dari kubus *ABCD.EFGH*. Oleh karena *ABCD* adalah persegi, maka $AB = BC = s$ adalah rusuk kubus (sisi persegi) sehingga panjang diagonal bidang *AC* dan panjang diagonal ruang *EC* dari kubus *ABCD.EFGH* dapat ditentukan dengan menggunakan dalil pythagoras berikut.

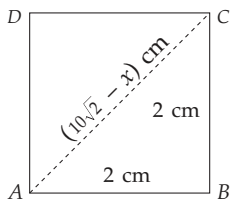
$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ AC^2 &= s^2 + s^2 \\ AC^2 &= 2\,s^2 \\ AC &= \sqrt{2s^2} \\ &= \sqrt{2}\;s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EC^2 &= AC^2 + EA^2 \\ EC^2 &= 2\,s^2 + s^2 \\ EC^2 &= 3\,s^2 \\ EC &= \sqrt{3s^2} \\ &= \sqrt{3}\;s \end{aligned}$$

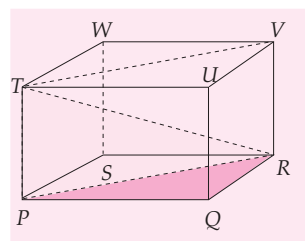
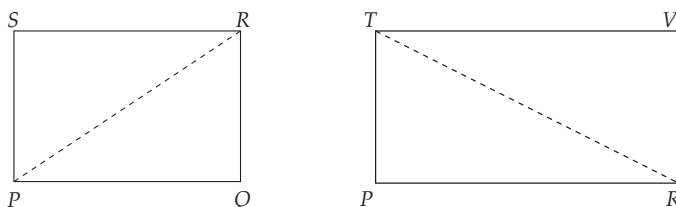
Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa:

> Panjang diagonal bidang kubus adalah $\sqrt{2}$ kali panjang rusuk kubus.
>
> Panjang diagonal ruang kubus adalah $\sqrt{3}$ kali panjang rusuk kubus.

Contoh SOAL

Sebuah kubus *ABCD.EFGH* memiliki alas *ABCD* berbentuk persegi dengan panjang rusuk 2 cm. Jika panjang diagonal bidang kubus $AC = (10\sqrt{2} - x)$ cm, tentukanlah nilai x.

Penyelesaian:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$\Leftrightarrow (10\sqrt{2} - x)^2 = 2^2 + 2^2$$
$$(10\sqrt{2} - x)^2 = 8$$
$$10\sqrt{2} - x = \sqrt{8}$$
$$10\sqrt{2} - x = 2\sqrt{2}$$
$$x = 10\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$
$$x = 8\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Pada balok, sisi-sisinya dapat berbentuk persegi panjang ataupun persegi. Untuk menentukan diagonal ruang dan bidang dari balok *PQRS.TUVW* pada Gambar 5.13, akan lebih mudah jika kalian menggambarkan kembali sisi-sisi dari balok menjadi bentuk yang lebih sederhana sebagai berikut.

Gambar 5.13 Balok *PQRS.TUVW*

Gambar 5.14 *PR* dan *TR* merupakan diagonal bidang dan ruang balok *PQRS.TUVW*

Pada Gambar 5.14, *PR* adalah diagonal bidang dan *TR* adalah diagonal ruang dari balok *PQRS.TUVW*. *PQRS* dan *PRVT* adalah persegi panjang dengan *PQ*, *QR*, dan *TP* adalah panjang, lebar, dan tinggi dari balok. Panjang diagonal bidang *PR* dan panjang diagonal ruang *TR* dapat ditentukan dengan dalil Pythagoras sebagai berikut.

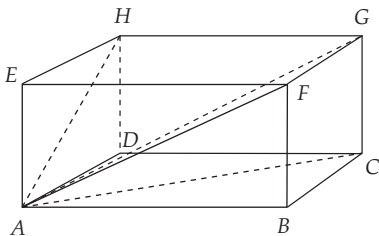
$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 \qquad TR^2 = PR^2 + TP^2$$
$$PR^2 = p^2 + \ell^2 \qquad TR^2 = p^2 + \ell^2 + t^2$$
$$PR = \sqrt{p^2 + \ell^2} \qquad TR = \sqrt{p^2 + \ell^2 + t^2}$$

Coba kalian cari panjang diagonal bidang dari sisi PQUT dan QRVU.

Panjang diagonal ruang balok adalah akar dari jumlah kuadrat panjang, lebar, dan tinggi balok.

Contoh SOAL

ABCD adalah balok dengan $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, dan $CG = 5$ cm. Hitunglah *AC*, *AF*, *AH*, dan *AG*.

Penyelesaian:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$= 8^2 + 6^2$
$AC^2 = 100$
$AC = 10$ cm

$AF^2 = AB^2 + BF^2$
$AF^2 = 8^2 + 5^2$
$= 64 + 25$
$AF = \sqrt{89}$ cm

$AH^2 = AD^2 + DH^2$
$= 6^2 + 5^2$
$= 36 + 25$
$AH = \sqrt{61}$ cm

$AG^2 = AC^2 + CG^2$
$= 100 + 5^2$
$AG^2 = 125$
$AG = \sqrt{125}$
$= 5\sqrt{5}$ cm

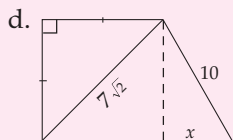
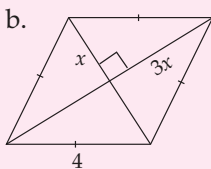
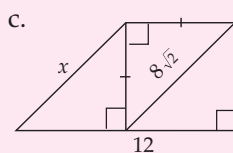
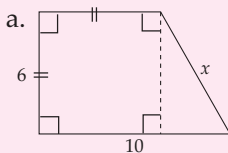
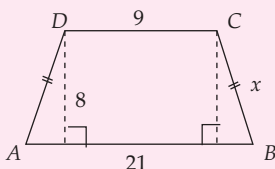
LATIHAN 6

1. Tentukan nilai x dari gambar-gambar di bawah ini.

a.

c.

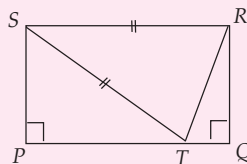
b.

d.

2. Perhatikan gambar di bawah ini.

ABCD adalah trapesium sama kaki. Hitunglah:

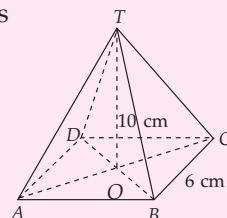
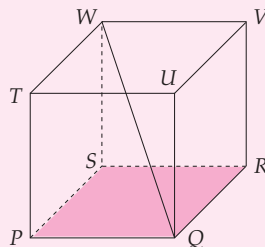
a. keliling *ABCD*

b. panjang *BD*

3. Diagonal-diagonal belah ketupat *ABCD* memiliki panjang 16 cm dan 12 cm. Hitunglah keliling belah ketupat tersebut.

4. $PQ = 10$ cm dan $PS = 6$ cm. *T* adalah sebuah titik pada *PQ* sehingga ΔSTR adalah segitiga sama kaki dengan $ST = SR$. Hitunglah panjang *RT*.

5. T.*ABCD* adalah limas dengan *ABCD* merupakan persegi dengan panjang sisi 6 cm. Tinggi limas = 10 cm. Hitunglah:

a. jumlah panjang rusuk limas;

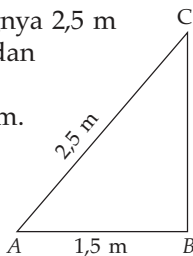
b. jumlah luas permukaan limas.

6. Perhatikan kubus berikut. Jika panjang rusuk kubus tersebut 10 cm. Buktikan bahwa panjang $QW = 10\sqrt{3}$ cm.

C Aplikasi Dalil Pythagoras dalam Kehidupan

Dalam kehidupan sehari-hari kita juga sering menggunakan dalil Pythagoras seperti contoh soal berikut ini.

Contoh SOAL

Sebuah tangga yang panjangnya 2,5 m disandarkan pada tembok dan jarak ujung bawah tangga dengan tembok adalah 1,5 m. Tentukanlah tinggi tembok.

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal ini ada baiknya soal ini dibuat sketsanya.

$BC^2 = AC^2 - AB^2$

$= (2,5)^2 - (1,5)^2$

$= 6,25 - 2,25$

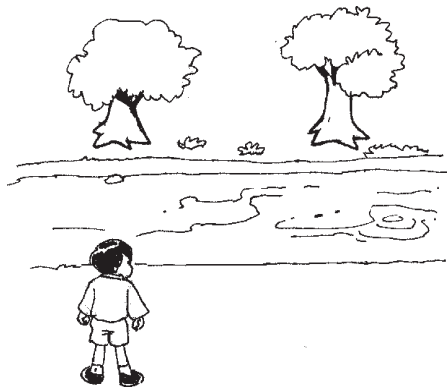
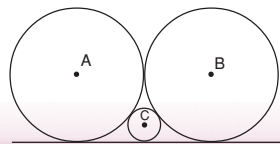
$BC^2 = 4$

$BC = \sqrt{4}$

$= 2$

Jadi, tinggi tembok adalah 2 m.

Soal-Soal Kontekstual

1. AB adalah sebuah tangga yang disandarkan pada sebuah tembok. Jika jarak kaki tangga (B) terhadap tembok (C) adalah 160 cm, sedangkan panjang tangga 2 m, berapakah tinggi tembok tersebut (dalam meter)?
2. Sebuah pesawat, terbang dari M ke N dengan jurusan tiga angka 030° sejauh 150 km. Dari N dilanjutkan ke P dengan jurusan 120° sejauh 80 km. Apabila pesawat tersebut dari M langsung ke N, berapa kilometerkah jarak yang harus ditempuh?
3. Seseorang bergerak dari A ke timur sejauh 30 m, kemudian ke arah selatan sejauh 40 m. Hitunglah jarak orang tersebut dari posisi semula.
4. Seseorang naik ke atas tiang yang tingginya 80 m dan melihat ke laut. Pada tiang tertambat 2 tali yang mengikat 2 perahu. Masing-masing tali panjangnya 100 m dan 70 m. Hitunglah jarak kedua perahu.
5. Di tepi suatu sungai ada 2 pohon (yaitu A dan B) yang jaraknya 120 m. Di C terdapat seseorang yang berdiri tepat berseberangan dengan pohon A dan kemudian melihat pohon B, yang berjarak 130 m. Hitunglah lebar sungai.

6. Jika dua roda dengan diameter yang sama, yaitu 20 m bersinggungan, hitunglah jari-jari lingkaran C (lingkaran kecil).

D Rumus Jarak (*Materi Pengayaan*)

Dalil Pythagoras digunakan untuk menentukan jarak dua titik. Pada Gambar 5.15, panjang AB diperoleh dengan menentukan titik C, sehingga terbentuk segitiga siku-siku ABC.

ABC adalah segitiga siku-siku dengan $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_2, y_1)$. AC, AB, dan BC adalah sisi-sisi segitiga, dengan sisi $AC = x_2 - x_1$ dan $BC = y_2 - y_1$.

Segitiga ABC adalah segitiga siku-siku. Pada segitiga ABC berlaku dalil Pythagoras, sehingga jarak AB dapat ditentukan sebagai berikut.

Gambar 5.15 Jarak AB

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Contoh SOAL

Diketahui A (–3, –6) dan B (–7, –9). Tentukanlah panjang AB.

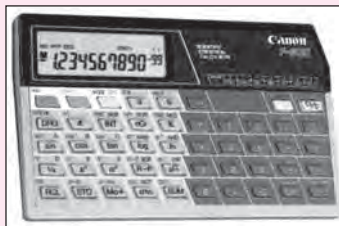
Penyelesaian:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(-7 - (-3))^2 + (-9 - (-6))^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

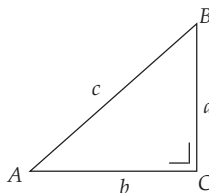
Jadi, panjang AB adalah 5 satuan.

LATIHAN 7

1. Dengan menggunakan rumus jarak, tentukanlah panjang dari dua titik di bawah ini.
   a. A (2, 5) dan B (5, 9)
   b. P (5, 1) dan Q (20, –7)
   c. B (–2, –1) dan C (3, 11)
   d. S (-2, –1) dan T (0, 0)
   e. M (3, –4) dan N (7, –7)
2. Diketahui sebuah ΔPQR dengan P (–3, 2), Q (6, –3), dan R (–1, 5). Hitunglah keliling ΔPQR tersebut.
3. Buktikan bahwa ΔPQR adalah segitiga sama kaki, jika P (–4, –2), Q (4, 6), dan R (–2, 4).
4. Diketahui titik M (6b, 4) dan N (4, b). Jika MN = 10 satuan, berapakah nilai b?
5. Diketahui sebuah persegi $ABCD$ dengan diagonal AC dan BD. Jika B (5, 1) dan $BD = 4\sqrt{2}$, tentukanlah koordinat D yang mungkin.
6. Sebuah ΔABC siku-siku di A dengan titik B (4, 2) dan titik C (1, 4). Tentukanlah panjang sisi BC.
7. Diketahui ΔABC siku-siku di A dengan titik A (1, 2), B (6, 2), dan C (1, y). Jika luas ΔABC = 15, tentukanlah y.

Kerjakan kegiatan ini dengan teman-temanmu.

a. Dengan menggunakan kalkulator, buatlah sebuah tabel yang memuat nilai kuadrat dari bilangan 1 sampai 40.
b. Perhatikan nilai-nilai kuadrat pada tabel yang diperoleh pada bagian a. Carilah nilai-nilai kuadrat pada tabel yang termasuk tripel Pythagoras dan buatlah dalam suatu tabel tersendiri.
c. Ada berapa banyak tripel Pythagoras yang kalian temukan?
d. Dapatkah kalian mencari dari tabel tripel Pythagoras tersebut, dua segitiga siku-siku yang memiliki panjang sisi berbeda tetapi memiliki luas yang sama?

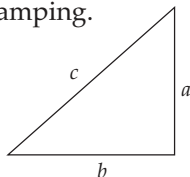
RANGKUMAN

1. Bilangan kuadrat adalah bilangan bulat yang merupakan hasil kali dari bilangan yang sama sebanyak dua kali.
2. Jumlah dari kuadrat kedua sisi siku-siku suatu segitiga siku-siku sama dengan kuadrat sisi miringnya (*hypotenusa*).
3. $c^2 = a^2 + b^2$
   $a^2 = c^2 - b^2$
   $b^2 = c^2 - a^2$

4. Jika suatu segitiga mempunyai panjang sisi-sisinya a, b, c, dan $a^2 + b^2 = c^2$ maka segitiga tersebut merupakan segitiga siku-siku dengan sudut siku-siku di c.
5. Tiga bilangan a, b, c dengan $a < b < c$ dikatakan tripel Pythagoras jika memenuhi hubungan $c^2 = a^2 + b^2$.
6. Suatu segitiga mempunyai panjang sisi a, b, c dan $a < b < c$
   jika $a^2 + b^2 < c^2$, maka ΔABC segitiga tumpul
   jika $a^2 + b^2 = c^2$, maka ΔABC segitiga siku-siku di c
   jika $a^2 + b^2 > c^2$, maka ΔABC segitiga lancip

Uji Kompetensi Bab 5

A Pilihan ganda

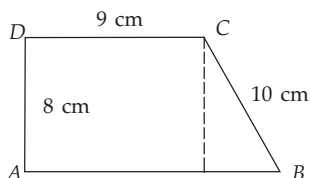
Berilah tanda silang (×) pada huruf a, b, c, atau d pada jawaban yang benar.

1. Perhatikan gambar di samping.
   (i) $a^2 = c^2 + b^2$
   (ii) $b^2 = c^2 - a^2$
   (iii) $c^2 = a^2 + b^2$
   (iv) $c^2 = a^2 - b^2$
   Pernyataan yang benar adalah ....
   a. (i) dan (ii)   c. (i) dan (iii)
   b. (ii) dan (iii)   d. (ii) dan (iv)

2. Diketahui sebuah segitiga siku-siku. Salah satu sisi siku-sikunya adalah 20 cm dan memiliki hipotenusa 29 cm. Panjang sisi siku-siku lainnya adalah ....
   a. 15 cm   c. 21 cm
   b. 18 cm   d. 23 cm

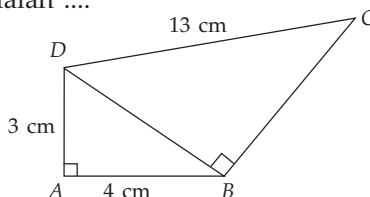
3. Pernyataan di bawah ini merupakan tripel Pythagoras, *kecuali* ....
   a. 3, 4, 6   c. 5, 12, 13
   b. 6, 8, 10   d. 8, 15, 17

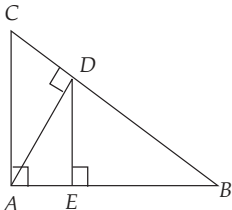
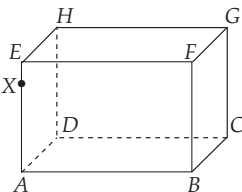
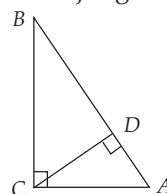
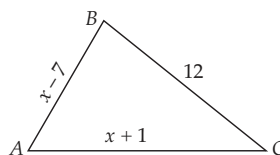
4. Jika a, 12 dan 13 adalah tripel Pythagoras maka nilai a adalah ....
   a. 2   c. 7
   b. 5   d. 10

5. Persegi $ABCD$ memiliki panjang diagonal $13\sqrt{2}$. Panjang sisi persegi $ABCD$ adalah ....
   a. 11 cm   c. 13 cm
   b. 12 cm   d. 18 cm

6. Perhatikan gambar di bawah ini.

   Jika $AD = 8$ cm, $CD = 9$ cm, dan $BC = 10$ cm, panjang AB adalah ....
   a. 9 cm   c. 18 cm
   b. 15 cm   d. 19 cm

7. Sebuah tangga yang panjangnya 13 cm bersandar pada tembok. Jika jarak antara ujung bawah tangga dengan tembok 5 m maka tinggi tembok adalah ....
   a. 8 m   c. $\sqrt{194}$ m
   b. 12 m   d. 18 m

8. Pada gambar di bawah ini diketahui $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm dan $CD = 13$ cm. Panjang BD dan BC berturut-turut adalah ....

   a. 5 cm dan 8 cm   c. 5 cm dan 12 cm
   b. 5 cm dan 10 cm   d. 5 cm dan 16 cm

9. Sebuah segitiga ABC siku-siku di C. Jika $AB = 18$ cm dan $BC = 10$ cm maka AC adalah ....
   a. $4\sqrt{14}$ c. $14\sqrt{16}$
   b. $8\sqrt{14}$ d. $16\sqrt{14}$

10. Perhatikan gambar di samping ini. $AC = 5$ cm dan $BC = 12$ cm. Panjang CD adalah ....
    a. 3,6 cm
    b. 4,6 cm
    c. 5,6 cm
    d. 6,6 cm

11. $\Delta\, ABC$ adalah segitiga siku-siku dengan $AB = (x - 7)$ cm, $BC = 12$ cm dan $AC = (x + 1)$ cm. Luas $\Delta\, ABC$ di bawah adalah ....

a. 12 cm^2 c. 30 cm^2
b. 23 cm^2 d. 32 cm^2

12. Segitiga PQR adalah segitiga siku-siku dengan siku-siku di P. Jika diketahui luas ΔPQR = 84 cm^2 dan PR = 7 cm, panjang sisi QR adalah ....
    a. 25 c. 45
    b. 35 d. 55

13. Segitiga ABC siku-siku di A dengan panjang sisi AB = 12 cm, $AC = 4x$ cm, dan $BC = 5x$ cm. Luas ΔABC adalah ....
    a. 48 cm^2 c. 100 cm^2
    b. 96 cm^2 d. 128 cm^2

14. Anton berjalan dari arah timur sejauh 6 km. Setelah sampai di T, ia berjalan lagi ke utara sejauh 8 km sampai di U. Jarak yang ditempuh Anton sekarang dari tempat semula adalah ....
    a. 10 km c. 14 km
    b. 12 km d. 16 km

15. Perhatikanlah gambar di bawah ini. Jika AC = 15 cm, AB = 20 cm maka panjang DE adalah ....

    a. 5 cm c. 7,2 cm
    b. 6 cm d. 9,6 cm

16. Balok $ABCD.EFGH$, dengan AB = 32 cm, BC = 24 cm, GC = 40 cm. Jika $AX : XE$ = 3 : 1, panjang CX adalah ....
    a. 30
    b. 40
    c. 50
    d. 60

17. Diketahui A(2, 6) dan B(a, 9). Jika AB = 5 maka nilai a yang mungkin adalah ....
    a. 6 c. –2 dan 6
    b. –2 d. –4 dan 4

18. ABC adalah sebuah segitiga dengan A(1, 2), B(5, 2), dan C(1, 6). Segitiga ABC adalah segitiga ....
    a. sembarang
    b. siku-siku
    c. sama kaki
    d. siku-siku sama kaki

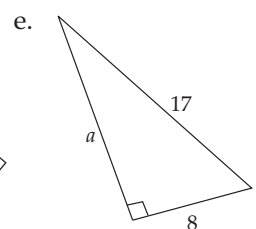
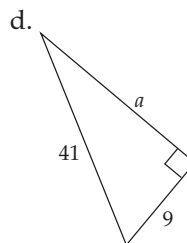
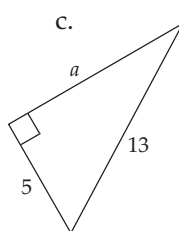
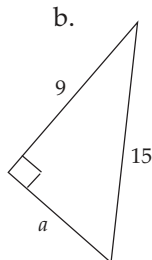
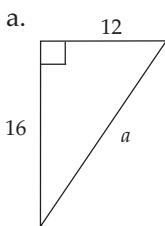
19. Seorang penembak mengarahkan senapannya dari atas gedung ke sasaran yang jauhnya 120 m dari kaki gedung. Tinggi gedung adalah 160 m. Jarak yang ditempuh peluru untuk sampai ke sasaran adalah ....
    a. 100 m c. 250 m
    b. 200 m d. 400 m

20. Tiga buah bilangan yang merupakan tripel Pythagoras merupakan barisan bilangan dengan beda 4. Jumlah ketiga bilangan itu adalah ....
    a. 24 c. 50
    b. 48 d. 60

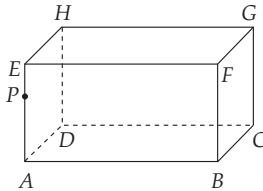
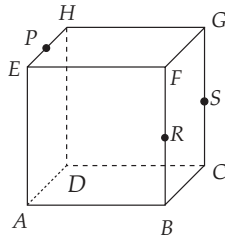
B Esai

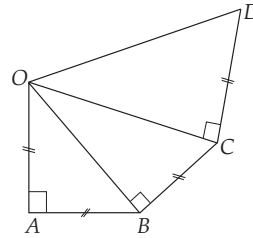
Selesaikanlah soal-soal di bawah ini.

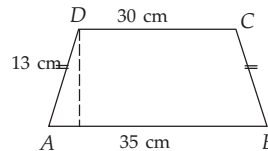
1. Hitunglah a.

a.
b.
c.
d.
e.

2. Tentukan jenis segitiga berikut jika sisinya:

a. 2, 5, 6	f. 9, 8 , 10
b. 4, 5, 6	g. 12, 16, 20
c. 2, 3, 4	h. 9, 12, 15
d. 6, 8, 10	i. 4, 8, 12
e. 7, 8, 12	j. 6, 8, 9

3. Jika AP : $PE = 4 : 1$ dan $GC = 5$, $AB = 10$, $BC = 8$, hitunglah
   a. AP
   b. BP
   c. CP

4. P, R, dan S adalah titik tengah EH, BF, dan CG. Jika rusuk kubus 12 cm, hitunglah:
   a. PR
   b. CP
   c. AS
   d. DR
   e. DS

5. $ABCD.EFGH$ adalah kubus dengan AB = 20 cm, BC = 12 cm, dan AE = 9 cm. Hitunglah panjang diagonal ruang kubus itu!

6. Diketahui $OA = AB = BC = CD$. Jika panjang OA = 40 cm. Hitunglah panjang OD.

7. Sebuah gedung berbentuk kubus memiliki ketinggian 12 m. Tentukan diagonal bidang dan diagonal ruang gedung itu.

8. Sebuah trapesium $ABCD$ dengan AB = 35 cm, CD = 30 cm, dan AD = 13 cm. Hitunglah tinggi dan luas trapesium itu.

9. Sebuah segitiga sama sisi memiliki panjang sisi 10 cm. Berapakah tinggi dan luas segitiga itu?

10. Sebuah persegi panjang memiliki panjang diagonal 48 cm dan panjangnya lebih besar 2 dari lebarnya. Berapakah keliling dan luas persegi panjang itu?

Latihan Ulangan Umum Semester 1

A Pilihan ganda

Berilah tanda silang (×) pada huruf a, b, c, atau d pada jawaban yang benar.

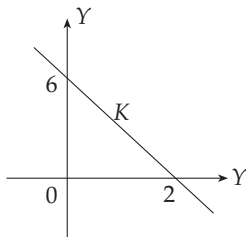
1. $\dfrac{2x^2 - 3x}{12 - 5x - 2x^2}$ dapat disederhanakan menjadi ....
   a. $\dfrac{x}{x-4}$ c. $-\dfrac{x}{x+3}$
   b. $-\dfrac{x}{x+4}$ d. $\dfrac{x}{x-3}$
2. $8x^2 - 32$ jika difaktorkan menjadi ....
   a. $(4x + 4)(4x - 2)$
   b. $(2x - 16)(x - 16)$
   c. $(4x - 4)(2x - 4)$
   d. $2(2x + 4)(2x - 4)$
3. $-2(3x - 1)^2$ sama dengan ....
   a. $9x^2 - 6x + 1$
   b. $18x^2 + 12x + 2$
   c. $-18x^2 + 12x - 2$
   d. $9x^2 + 12x - 2$
4. Hasil penjumlahan $8x^2 - 9x + 8$ dan $-x^2 + 3x - 9$ adalah ....
   a. $9x^2 - 6x - 17$
   b. $9x^2 + 12x - 17$
   c. $7x^2 + 12x - 17$
   d. $7x^2 - 6x - 1$
5. $(2x + 4)(x - 3) = ...$
   a. $2x^2 - 10x - 12$ c. $2x^2 + 7x - 12$
   b. $2x^2 - 2x - 12$ d. $x^2 + 10x - 12$
6. $(3x^2 - 4x + 5) - (-2x^2 - 4x - 2) = ...$
   a. $5x^2 + 7$ c. $5x^2 - 8x + 3$
   b. $x^2 - 8x + 3$ d. $5x^2 - 8x - 7$
7. Penyederhanaan dari bentuk aljabar $\dfrac{x+4}{x^2-9} - \dfrac{5x}{x+3}$ adalah ....
   a. $\dfrac{4 + 16x - 5x^2}{9 - x^2}$
   b. $\dfrac{4 + 16x - 5x^2}{x^2 - 9}$
   c. $\dfrac{4 + 16x + 5x^2}{x^2 - 9}$
   d. $\dfrac{4 + 16x - 5x^2}{3(x^2 - 9)}$
8. $6x^2 + 8xy - 8y^2$ jika difaktorkan sama dengan ....
   a. $(3x - 2y)(2x + 4y)$
   b. $(2x - 2y)(3x - 4y)$
   c. $(3x - 4y)(2x - 2y)$
   d. $(3x + 2y)(3x - 4y)$
9. Pemaktoran dari $x^2 + 14x - 72$ adalah ....
   a. $(x - 9)(x + 8)$ c. $(x - 18)(x + 4)$
   b. $(x + 9)(x - 8)$ d. $(x + 18)(x - 4)$
10. Jika $p(x) = 2x^2 - 8$ dan $p(a) = 0$ maka nilai $a = ...$
    a. -6 c. 3
    b. 2 d. 6
11. Jika $f(x) = x^2 - 8x + 12$ maka $f(-2) = ...$
    a. -32 c. 32
    b. 24 d. 64
12. Di antara himpunan-himpunan berurutan berikut ini yang merupakan fungsi adalah ....
    a. $\{(p, 1), (q, 2), (p, 3), (q, 4)\}$
    b. $\{(5, p), (3, p), (2, p), (4, p)\}$
    c. $\{(1, c), (3, c), (3, b), (4, a)\}$
    d. $\{(l, 2), (l, 4), (m, 6), (m, 3)\}$
13. Suatu fungsi ditentukan dengan rumus $f(x) = ax + b$. Jika $f(3) = 1$ dan $f(-2) = -9$ maka nilai a dan b berturut-turut adalah ....
    a. 5 dan -2 c. 2 dan 5
    b. 2 dan -5 d. -5 dan 2
14. Sebuah fungsi dinyatakan dengan pasangan berurutan {(2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)}. Notasi fungsi yang mungkin adalah ....

a. $f : x \to x + 2$ c. $f : x \to 2x + 1$
b. $f : x \to x + 3$ d. $f : x \to 2x + 1$

15. Jika A = {bilangan prima kurang dari 5} dan B = {bilangan genap kurang dari 10} maka banyak pemetaan dari B ke A adalah ....
a. 16 c. 64
b. 32 d. 128

16. Sebuah pemetaan notasinya $f : x \to x^2 - 1$. Jika domainnya {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3} maka *range* yang mungkin adalah ....
a. {–8, –5, –2, –1, 0, 3, 8}
b. {–1, 0, 3, 8}
c. {0, 1, 3, 8}
d. {–1, 0, 1, 3, 8}

17. Persamaan garis lurus yang melalui titik (0, –4) dan tegak lurus dengan garis $y = -\frac{2}{5}x + 4$ adalah ....
a. $y = -\frac{5}{2}x - 4$ c. $y = -\frac{5}{2}x + 4$
b. $y = \frac{5}{2}x - 4$ d. $y = \frac{5}{2}x + 4$

18. Persamaan garis yang sejajar dengan garis K adalah ....

a. $y = \frac{1}{3}x + 2$ c. $y = -\frac{1}{3}x - 2$
b. $y = 3x + 2$ d. $y = -3x - 2$

19. Persamaan garis lurus yang melalui titik (2, 3) dan (– 4, 1) adalah ....
a. $-6y = -2x + 14$ c. $6y = 2x + 14$
b. $6y = -2x + 14$ d. $6y = 2x - 14$

20. Gradien garis dengan persamaan $3x + 4y = 9$ adalah ....
a. $-\frac{4}{3}$ c. $\frac{4}{3}$
b. $\frac{3}{4}$ d. $-\frac{3}{4}$

21. Persamaan garis lurus yang bergradien $-\frac{2}{3}$ dan melalui titik (0, 3) adalah ....
a. $y = -\frac{2}{3}x - 3$ c. $y = -\frac{2}{3}x + 3$
b. $y = \frac{2}{3}x - 3$ d. $y = \frac{2}{3}x + 3$

22. Persamaan garis lurus yang melalui titik (3, –2) dan (4, 1) adalah ....
a. $y = 3x - 11$ c. $y = -3x + 5$
b. $y = 3x - 7$ d. $y = -3x - 5$

23. Persamaan garis yang melalui (5, –3) dan sejajar dengan garis $8x + 4y - 16 = 0$ adalah ....
a. $2x - y - 13 = 0$ c. $2x + y - 7 = 0$
b. $4x - y - 23 = 0$ d. $3x + y - 12 = 0$

24. Himpunan penyelesaian sistem persamaan $6x - y - 2 = 0$ dan $3x - 2y + 5 = 0$ adalah ....
a. (–1, 4) c. (–4, 1)
b. (1, 4) d. (–4, –1)

25. Penyelesaian dari sistem persamaan $3x - 2y = -5$ dan $4x - y = 15$ adalah p dan q. Nilai $p + q$ adalah ....
a. 20 c. –4
b. 4 d. –20

26. Jumlah dua bilangan adalah 14. Bilangan yang satu adalah 4 lebihnya dari bilangan yang lain. Hasil kali kedua bilangan ini adalah ....
a. 36 c. 45
b. 72 d. 56

27. Harga 4 buah buku dan 3 pensil Rp2.600,00 sedangkan dua buku harganya sama dengan 5 pensil. Adil membeli 1 lusin buku dan 10 pensil. Harga yang harus dibayar Adil adalah ....
a. Rp7.500,00 c. Rp6.000,00
b. Rp8.000,00 d. Rp9.000,00

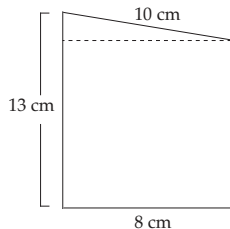
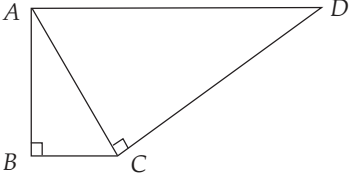
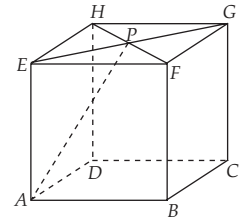
28. Himpunan penyelesaian dari sistem $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 2$ dan $\frac{5}{x} + \frac{6}{y} = 4$ adalah ....
a. $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})\}$ c. $\{(\frac{1}{2}, -1)\}$
b. {(2, 4)} d. {(2, 1)}

29. Himpunan penyelesaian dari sistem persamaan $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y = 2$ dan $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 2\frac{1}{2}$ adalah ....
    a. {(6, 3)} c. {(–6, 3)}
    b. {(3, 6)} d. {(–3, 6)}

30. Luas sebuah persegi adalah 32 cm^2. Panjang diagonalnya adalah ....
    a. 6. c. 10
    b. 8 d. 5

31. Yang merupakan tripel Pythagoras adalah ....
    a. 2, 4, 8 c. 8, 15, 17
    b. 3, 4, 6 d. 20, 15, 30

32. Luas bidang di samping adalah ....
    a. 80 cm^2
    b. 72 cm^2
    c. 75 cm^2
    d. 64 cm^2

10 cm
13 cm
8 cm

33. Kubus *ABCD. EFGH* memiliki rusuk 4 cm. Panjang ruas garis *AP* adalah ....
    a. $4\sqrt{2}$ cm
    b. $3\sqrt{3}$ cm
    c. $2\sqrt{6}$ cm
    d. $2\sqrt{5}$ cm

34. Diketahui segitiga siku-siku dengan sisi *a, b, c,* dengan $c < b < a$. Pernyataan yang benar adalah ....
    a. $a^2 + b^2 = c^2$ c. $b^2 - c^2 = a^2$
    b. $b^2 + c^2 = a^2$ d. $c^2 + a^2 = b^2$

35.

Jika panjang AB = 16 cm, BC = 12 cm dan AD = 29 cm maka panjang CD adalah ....
    a. 24 cm c. 9 cm
    b. 6, 9 cm d. 21 cm

B Esai

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini.

1. Sederhanakan bentuk:

$$\frac{3}{x^2 + x - 2} - \frac{2}{x^2 + 3x + 2}$$

2. Untuk $g : \rightarrow 3x^2 - 2x$ tentukanlah:
    a. bayangan dari –3;
    b. anggota daerah asal yang bayangannya 176.

3. Fungsi $f : x \rightarrow 2x^2 - 3$ mempunyai daerah hasil {15, 29, 47, 69, 95}. Tentukan daerah asal fungsi tersebut.

4. Suatu fungsi ditentukan dengan rumus $f(x) = ax + b$. Jika pada fungsi itu di ketahui $f(-2) = -8$, dan $f(5) = 15$, tentukanlah:
    a. nilai a dan b b. nilai $f(-4)$

5. Diberikan titik A (1, 3), B (2, 4) dan C (–2, 2) berikut.
    a. Tentukan gradien garis BC.
    b. Tentukan persamaan garis yang melalui A dan tegak lurus garis BC.

6. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut dengan cara eliminasi dan subsitusi.

    a. $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$

    b. $\begin{cases} 2x + 5y - 10 = 0 \\ 5y = 2(x + 5) \end{cases}$

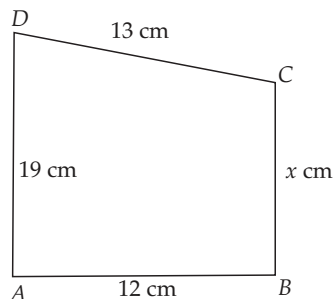
7. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut dengan cara eliminasi dan subtitusi.

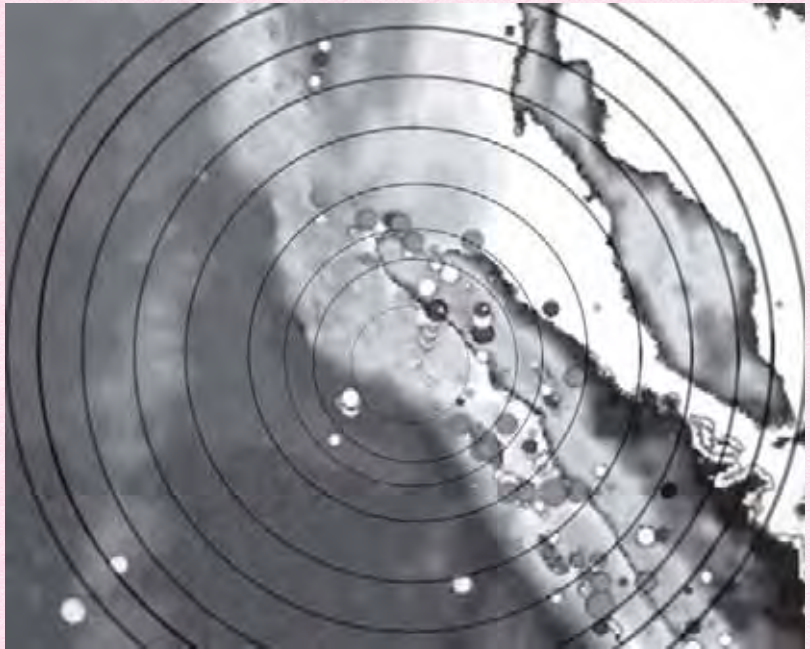
    a. $\begin{cases} 2y - x = 10 \\ 3y + 2x = 29 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{5}{p} - \frac{3}{g} = 1 \\ \frac{7}{p} + \frac{3}{g} = 2 \end{cases}$

8. Sebuah sirkus memasang tarif karcis tanda masuk sebesar Rp20.000,00 untuk dewasa dan Rp15.000.00 untuk anak-anak. Setelah pertunjukan berakhir ternyata terkumpul uang Rp16.450.000,00 dan karcis yang terjual 980 lembar. Berapakah banyak masing-masing orang dewasa dan anak-anak yang menonton?

9. Dalam sebuah segitiga siku-siku, panjang sisi terpanjang adalah $(2x + 9)$ cm, sedangkan dua sisi yang lain masing-masing adalah 8 cm dan $(2x + 7)$ cm. Tentukanlah x dan luas segitiga tersebut.

10. Tentukanlah:
    a. nilai x;
    b. luas segi empat $ABCD$.

BAB 6

Lingkaran

Sumber: Majalah Tsunami. Dinas Penerangan TNI AU

Tujuan Pembelajaran

- Memahami pengertian lingkaran dan mengenal bagian-bagiannya
- Menemukan rumus keliling dan luas lingkaran serta dapat menggunakannya dalam pemecahan masalah
- Mengenal hubungan sudut pusat, panjang busur, dan luas juring serta dapat menggunakannya dalam pemecahan masalah

Pada kelas VII, kalian tentu telah belajar beberapa bentuk bangun datar seperti bangun persegi panjang dan persegi. Selanjutnya, pada bab ini kalian akan mempelajari bangun datar yang lain. Bangun apakah itu? Ciri-ciri bangun datar ini adalah memiliki sisi yang melengkung. Bangun datar itu adalah lingkaran.

Ingatkah kalian pada gempa bumi yang melanda Provinsi Nanggroe Aceh Darussalam (NAD) dan Sumatera Utara pada tanggal 26 Desember 2004 yang lalu?

Pusat gempa (episentrum) berada di Samudera Hindia. Rambatan Gelombang dari pusat gempa ke daerah-daerah di sekitar episentrum berupa lingkaran-lingkaran yang semakin besar, seperti ketika kita melempar batu ke dalam air. Dari bentuk lingkaran tersebut kita dapat memperkirakan cakupan gempa bumi tersebut.

Untuk mengetahui cara menghitung luas daerah lingkaran pelajarilah pembahasan pada bab ini.

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

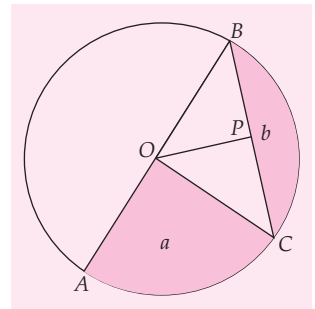
1. Sebutkanlah benda-benda di sekelilingmu yang berbentuk lingkaran.
2. Dapatkah kalian menyebutkan definisi dari lingkaran?
3. Sebutkanlah perbedaan antara bidang lingkaran dan keliling lingkaran.
4. Hitunglah keliling lingkaran dengan jari-jari 7 cm.
5. Hitunglah luas lingkaran dengan diameter 20 cm.

A Lingkaran dan Bagian-Bagiannya

Sewaktu di sekolah dasar, kalian telah dikenalkan dengan lingkaran. Masih ingatkah kalian dengan pengertian lingkaran? Apa saja bagian-bagian lingkaran? *Lingkaran* adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap satu titik tertentu. Titik tertentu itu adalah titik yang berada tepat di tengah lingkaran yang sering disebut *titik pusat lingkaran.*

Gambar 6.1 Lingkaran dan bidang lingkaran.

Pada Gambar 6.1 daerah yang diarsir adalah *bidang lingkaran*, sedangkan garis putus-putus yang mengitari arsiran adalah lingkaran dan panjang garis putus-putus ini dinamakan *keliling lingkaran.*

Di samping pusat lingkaran, lingkaran juga mempunyai jari-jari. Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 6.2.

Gambar 6.2 Lingkaran dan bagian-bagiannya

Pada Gambar 6.2 diketahui bahwa:

garis AB adalah *diameter lingkaran*,

garis OA, OB, OC adalah *jari-jari*,

garis BC adalah *tali busur*,

bidang a adalah *juring*, dan

bidang b adalah *tembereng*.

Garis lengkung AB, AC, dan BC merupakan *busur lingkaran*.

Garis OP yang tegak lurus tali busur BC adalah *apotema.*

Diameter lingkaran biasa dilambangkan dengan d, sedangkan jari-jari biasa dilambangkan dengan r. Hubungan antara d dan r adalah sebagai berikut.

$$r = \frac{1}{2}d \quad \text{atau} \quad d = 2r$$

Jadi, kita dapat mendefinisikan *diameter* sebagai suatu garis lurus yang melalui titik pusat lingkaran dan menghubungkan dua titik berbeda pada keliling lingkaran.

Sekarang, bagaimanakah definisi dari jari-jari lingkaran? *Dapatkah kalian mendefinisikannya? Cobalah kalian tuliskan dengan kata-katamu sendiri definisi dari tiap bagian atau unsur lingkaran yang telah kalian ketahui dari penjelasan di atas. Jika ada bagian yang kalian belum paham, carilah informasi dari berbagai sumber atau mintalah penjelasan dari gurumu.*

Nilai π

Untuk menemukan nilai π, coba kalian salin dan kerjakan kegiatan berikut. Kemudian, jawablah semua pertanyaan dari titik-titik pada tugas ini.

Sediakan tiga jenis uang logam yang berbeda ukurannya yaitu Rp1.000,00; Rp500,00; dan Rp100,00.

Dengan menggunakan benang, ukurlah keliling lingkaran dari ketiga uang logam itu. Setelah mengukur keliling lingkaran ketiga uang logam tersebut, setiap siswa diharapkan mengukur diameter uang logam tersebut. Setelah itu, salin tabel berikut dan masukkan hasil pengukuran yang kalian dapat pada tabel tersebut.

Sumber: Matematika dan Komputer, Tira Pustaka

Gambar 6.3 Uang Logam

Uang Logam	Keliling	Diameter
a. Seribu	...	...
b. Lima ratus	...	...
c. Seratus	...	...

Dari hasil yang diperoleh pada tabel, coba kalian bandingkan keliling lingkaran dengan diameternya. Berapa nilai yang kalian peroleh? Nilai $\frac{Keliling\ (K)}{diameter\ (d)}$ yang diperoleh adalah . . . < $\frac{K}{d}$ < . . . atau sekitar . . . .

Nilai $\frac{K}{d}$ inilah yang disebut dengan π (dibaca ”phi”).

Jadi, melalui kegiatan ini dapat diperoleh rumus dari keliling lingkaran, yaitu $K \approx \pi d$ atau $\pi \approx \frac{K}{d}$

Coba kalian cari dari buku-buku pada perpustakaan di sekolah tentang nilai dari π. Laporkan hasilnya pada gurumu.

B Besaran-Besaran pada Lingkaran

Pada bagian sebelumnya kalian sudah menemukan rumus keliling lingkaran. Pada bagian ini akan kita gunakan rumus tersebut untuk menyelesaikan soal yang berhubungan dengan keliling lingkaran. Untuk lebih jelasnya perhatikan penjelasan berikut.

1 Keliling Lingkaran

Perhatikan Gambar 6.4. Jika seseorang berjalan dari titik *A* melintasi garis lengkung dan kembali lagi ke titik *A* maka dikatakan orang tersebut telah mengelilingi lingkaran. Panjang lintasan itu disebut keliling lingkaran dan panjangnya bergantung pada *r* atau jari-jari lingkaran.

Gambar 6.4 Keliling lingkaran dengan jari-jari *r* dan diameter *d*.

Dari persamaan $\pi = \frac{K}{d}$ yang telah kita peroleh pada subbab sebelumnya, kita dapat menyimpulkan bahwa keliling lingkaran merupakan perkalian antara diameter dan konstanta π, dengan $\pi = \frac{22}{7}$ atau $\pi \approx 3{,}14$.

Keliling lingkaran $= \pi \times$ diameter
$= \pi \times d$

Jadi, **keliling lingkaran $= \pi d$**

Karena $d = 2r$, maka:

Keliling lingkaran $= \pi \times 2r$
$= 2\pi r$.

Jadi, **keliling lingkaran $= 2\pi r$**

Contoh SOAL

1. Tentukanlah keliling lingkaran jika diketahui jari-jarinya 14 cm.

   Penyelesaian:

   Keliling lingkaran $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 14$
   $= 88$ cm.

2. Diameter sebuah roda adalah 42 cm.
   a. Berapa jarak yang ditempuh roda dalam satu putaran penuh?
   b. Berapa banyak putaran yang dibutuhkan roda untuk menempuh jarak sejauh 1.320 m?

Penyelesaian:

a. $d = 42$ cm

   $K = \pi d$

   $K = \frac{22}{7} \times 42$

   $= 132$ cm

   Jadi, jarak 1 putaran = 132 cm.

b. Jarak tempuh = 1.320 m = 132.000 cm

   Banyak putaran $= \frac{132.000}{132}$
   $= 1.000$ kali.

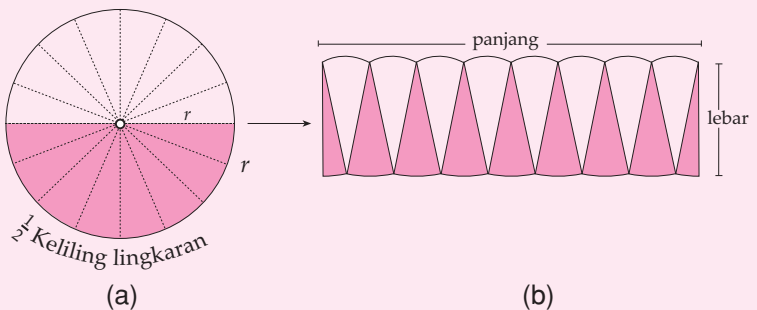
LATIHAN 1

1. Hitunglah keliling lingkaran jika diketahui diameternya:
   a. 21 cm
   b. 3,5 cm
   c. 17,5 cm
   d. 12,56 cm
2. Hitunglah keliling lingkaran jika jari-jarinya:
   a. 20 cm
   b. 17,5 cm
   c. 10 cm
   d. 1,75 cm
3. Hitunglah diameter lingkaran jika kelilingnya:
   a. 33 cm
   b. 154 cm
   c. 770 cm
   d. 3.140 cm
4. Hitunglah jari-jari lingkaran jika kelilingnya:
   a. 44 cm
   b. 616 cm
   c. 440 cm
   d. 8.800 cm
5. Jarak sepanjang 660 m dapat ditempuh oleh sepeda motor setelah rodanya berputar sebanyak 100 putaran. Berapakah jari-jari roda sepeda motor tersebut?

2 Luas Bidang Lingkaran

Bagaimanakah cara menentukan luas bidang lingkaran? Untuk itu, coba kalian kerjakan kegiatan berikut dan jawablah semua pertanyaan yang diberikan. (kerjakan berkelompok)

Sediakan sebuah karton untuk membuat sebuah lingkaran dengan ukuran 15 cm sampai dengan 20 cm.

Setelah kalian membuat sebuah lingkaran dengan jari-jari kurang lebih 15 cm sampai dengan 20 cm, potonglah lingkaran itu menjadi 16 bagian yang sama dengan menggunakan busur. Susunlah kembali potongan tadi seperti pada Gambar 6.5 (b) di bawah ini.

Gambar 6.5 Lingkaran dibagi menjadi 16 bagian.

Setelah itu, cobalah kalian jawab pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

1. Menyerupai bangun datar apakah potongan-potongan lingkaran yang telah kalian susun kembali seperti Gambar 6.5 (b)?

2. Apabila jari-jari lingkaran adalah r, berapakah lebar dari bangun pada Gambar 6.5(b)?
3. Apakah bangun yang terbentuk dari penggabungan potongan-potongan lingkaran pada Gambar 6.5(b) menyerupai bangun persegi panjang?
4. Apabila panjang lengkungan dari tiap potongan itu dijumlahkan maka panjangnya sama dengan suatu besaran pada lingkaran yang telah kita pelajari sebelumnya, apakah itu? Kalau kalian masih bingung, coba gabungkanlah kembali potongan-potongan lingkaran itu. Perhatikan sisi tepi dari lengkungan potongan-potongan itu, menyerupai apakah bentuk sisi tepi lengkungan potongan-potongan itu bila digabungkan kembali?
5. Apakah luas potongan-potongan lingkaran yang telah disusun kembali tadi sama dengan luas bidang lingkaran mula-mula? Berapakah panjang dan lebar dari potongan-potongan lingkaran itu setelah disusun seperti Gambar 6.5(b)?

Sekarang, tentunya kalian telah dapat menentukan luas dari Gambar 6.5 (a) maupun luas dari potongan-potongan lingkaran pada karton yang telah kalian susun seperti Gambar 6.5 (b).

Selanjutnya, *apakah yang dapat kalian simpulkan dari kegiatan ini? Dari kegiatan di atas, bagaimanakah rumus luas lingkaran yang kalian dapatkan? Jika kalian cermat, akan kalian temukan rumus luas daerah lingkaran, yaitu* $L = \pi r^2$

Karena $d = 2r$, maka luas daerah lingkaran menjadi:

$$L = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{2}d\right)^2 = \pi \times \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$$

Jadi, **Luas daerah lingkaran $= \frac{1}{4}\pi d^2$**

dengan r = jari-jari, d = diameter dan $\pi = \frac{22}{7}$ atau $\approx 3{,}14$.

Sumber: College Physics

Gambar 6.6 Tempat kedudukan ujung golf saat memukul bola dapat membentuk suatu lingkaran.

Untuk Diingat

Garis tali busur yang melalui titik pusat sebuah lingkaran merupakan *garis tengah* (diameter) dari lingkaran tersebut.

Contoh SOAL

1. Hitunglah luas daerah lingkaran yang panjang jari-jarinya 14 cm.

   Penyelesaian:

   $$L = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 14 \text{ cm} \times 14 \text{ cm} = 616 \text{ cm}^2$$

2. Hitunglah luas daerah lingkaran yang panjang diameternya 21 cm.

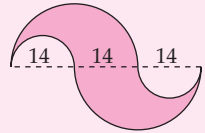
   Penyelesaian:

   $$L = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 346{,}5 \text{ cm}^2$$

LATIHAN 2

1. Hitung luas lingkaran dengan jari-jari sebagai berikut.
   a. 7 cm
   b. 21 cm
2. Hitunglah luas lingkaran yang panjang diameternya sebagai berikut.
   a. 21 cm
   b. 35 cm
   c. 80 cm
   d. 100 cm
3. Hitunglah jari-jari lingkaran jika diketahui luas lingkarannya sebagai berikut.
   a. 154 cm^2
   b. 3.850 cm^2
4. Hitunglah diameter lingkaran jika diketahui luas lingkarannya sebagai berikut.
   a. 616 cm^2
   b. 962,5 cm^2

Tugas Siswa

Hitunglah luas daerah yang diarsir pada gambar di samping (satuan dalam cm).

3 Hubungan Sudut Pusat, Panjang Busur, dan Luas Juring

a. Pengertian Sudut Pusat

Gambar 6.7 Sudut pusat *AOB*

Untuk memahami pengertian sudut pusat coba perhatikan gambar di samping. Pada Gambar 6.7 $\angle AOB$ yang menghadap busur *AB* yang kecil adalah *sudut pusat lingkaran*.

Dengan mengamati Gambar 6.7 dan penjelasan di atas, *coba kalian tuliskan dengan kata-katamu sendiri definisi dari sudut pusat lingkaran. Bandingkan jawabannya dengan pernyataan berikut.*

> Sudut yang dibentuk oleh dua buah jari-jari lingkaran dengan titik sudutnya pada pusat lingkaran dan menghadap busur yang kecil disebut *sudut pusat lingkaran.*

b. Hubungan Antara Sudut Pusat dan Panjang Busur

Gambar 6.9 Panjang busur *AB*.

Mari kita perhatikan gambar di bawah ini.

Gambar 6.8 Sudut pusat *AOB, COD, EOF.*

Pada Gambar 6.8 terdapat tiga buah lingkaran dengan sudut pusat berbeda. Dapat dilihat bahwa besar sudut pusat *AOB* < besar sudut pusat *COD* < besar sudut pusat *EOF*. Dari ketiga sudut pusat itu juga dapat dilihat bahwa panjang busur *AB* < panjang busur *CD* < panjang busur *EF*.

Berdasarkan keterangan di atas, *apa yang dapat kalian simpulkan mengenai hubungan sudut pusat dengan panjang busur? Bandingkan jawabanmu dengan jawaban teman-temanmu, jika berbeda mintalah petunjuk dari gurumu.*

c. Hubungan Antara Sudut Pusat dan Luas Juring

Mari kita perhatikan penjelasan gambar di samping. Pada Gambar 6.10 diperlihatkan dua juring, yaitu juring *AOB* dan juring *COD*. Sudut pusat *AOB lebih kecil* dari sudut pusat *COD*. Jika juring *AOB* kita gunting dan diletakkan pada juring *COD* maka juring *AOB* tidak dapat menutupi juring *COD*. Apakah artinya? Ini berarti luas juring *AOB lebih kecil* dari luas juring *COD*.

Gambar 6.11 Juring *AOB* dan *COD*

Dari penjelasan di atas, *apa yang dapat kalian simpulkan tentang hubungan sudut pusat dengan luas juring? Bandingkan jawabanmu dengan jawaban teman-temanmu, jika berbeda mintalah petunjuk dari gurumu.*

Kalian telah mendapat kesimpulan mengenai hubungan antara sudut pusat dan panjang busur serta hubungan sudut pusat dengan luas juring. Apakah kesimpulan-kesimpulan yang kalian dapatkan itu mengarah pada sebuah kesimpulan bahwa pada setiap lingkaran berlaku:

> Semakin besar sudut pusat maka semakin besar panjang busur dan semakin besar juga luas juringnya. Sebaliknya, semakin kecil sudut pusat maka semakin kecil panjang busur dan semakin kecil juga luas juringnya.

d. Perhitungan Panjang Busur

Untuk menghitung panjang busur kita harus menemukan rumus panjang busur terlebih dahulu. Agar kalian memahami cara menemukan rumus panjang busur lingkaran pelajari penjelasan berikut.

Gambar 6.12 Sudut Pusat *AOE*

Pada Gambar 6.11 $\angle AOB$ adalah sudut pusat lingkaran. Besar sudut pusat *AOB* adalah 90° (sudut tegak lurus). Panjang busur *AB* adalah $\frac{1}{4}$ keliling lingkaran. Karena satu putaran besar sudutnya 360°, maka panjang busur *AB* dapat ditulis $\frac{90°}{360°}$ × keliling lingkaran.

Untuk lebih jelas lagi mengenai perhitungan panjang busur perhatikan tabel berikut.

Sudut Pusat	Besar Sudut Pusat	Panjang Busur	Rumus
$\angle AOB$	90°	$\frac{1}{4}$ keliling	$\frac{90°}{360°} \times$ keliling $= \frac{1}{4}$ keliling
$\angle AOC$	180°	$\frac{1}{2}$ keliling	$\frac{180°}{360°} \times$ keliling $= \frac{1}{2}$ keliling
$\angle AOD$	270°	$\frac{3}{4}$ keliling	$\frac{270°}{360°} \times$ keliling $= \frac{3}{4}$ keliling
$\angle AOE$	$a°$	. . .	$\frac{a°}{360°} \times$ keliling

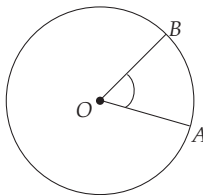
Dari tabel di atas, tentunya kalian dapat memahami dasar penurunan rumus panjang busur. *Apakah kesimpulan yang dapat kalian tuliskan mengenai rumus menghitung panjang busur itu?* Apakah kesimpulan yang kalian dapatkan mengarah pada sebuah kesimpulan bahwa jika besar sudut $AOE = a°$, maka panjang busur $AE = \frac{a°}{360°} \times$ keliling lingkaran. Secara umum dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\text{Panjang busur } AE = \frac{a°}{360°} \times 2\pi r$$

Contoh SOAL

Pada gambar di samping besar sudut $AOB = 30°$ dan panjang $OB = 21$ cm. Hitunglah panjang busur AB dan keliling juring AOB.

Penyelesaian:

Panjang busur $AB = \frac{30°}{360°} \times$ keliling lingkaran

$= \frac{1}{12} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

$= 11$ cm

Jadi, keliling juring AOB

$= OA + OB +$ panjang busur AB

$= 21$ cm $+ 21$ cm $+ 11$ cm

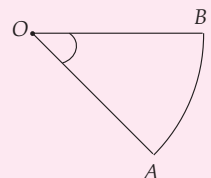
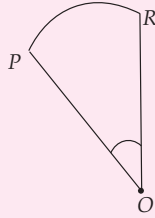
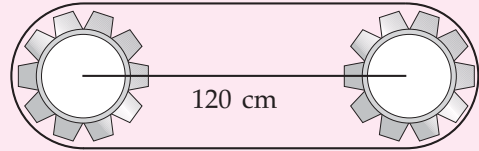
$= 53$ cm.

LATIHAN 3

1. Hitunglah panjang busur AB dengan jari-jari 14 cm, jika besar sudut pusat AOB:
   a. 120°
   b. 225°
   c. 150°
   d. 320°

2. Hitunglah keliling juring di bawah.

	Sudut Pusat AOB	Panjang OB
a.	48°	10 cm
b.	54°	14 cm
c.	72°	21 cm
d.	144°	35 cm

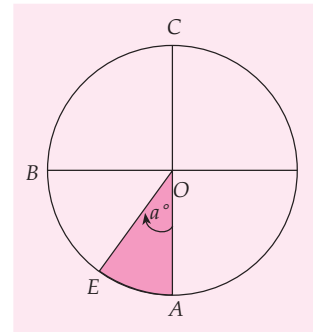
O B A

3. Pada gambar di bawah panjang OP = 7 cm. Jika keliling juring tersebut $21\frac{1}{3}$ cm, tentukanlah besar sudut POR.

4. Dua buah roda gigi besarnya sama mempunyai jari-jari 28 cm. Jarak antara titik pusat roda 120 cm. Berapakah panjang sabuk yang dibutuhkan untuk melingkari kedua roda gigi tersebut?

e. Perhitungan Luas Juring

Setelah kalian memahami dasar penurunan rumus menghitung panjang busur, bagaimanakah cara menentukan rumus menghitung luas juring? Dasar penurunan rumus luas juring hampir sama dengan mencari rumus panjang busur yang telah dipelajari sebelumnya. Untuk lebih jelasnya perhatikanlah penjelasan berikut.

Gambar 6.12 Juring *AOE*.

Pada Gambar 6.12 luas juring AOC = setengah luas daerah lingkaran.

$$\text{Luas juring } AOC = \frac{1}{2} \times \text{luas lingkaran}$$

$$= \frac{1}{2} \times \pi r^2$$

Selanjutnya, kita dapat menyatakan luas juring AOC dengan perbandingan senilai yang telah kita pelajari di kelas VII.

$$\text{Luas juring } AOC = \frac{1}{2} \times \pi r^2 = \frac{180°}{360°} \times \pi r^2$$

Telah kita ketahui sudut 180° adalah besar sudut pusat AOC, sehingga jika besar sudut pusat AOB = 90° maka

$$\text{Luas juring } AOB = \frac{1}{4} \times \text{luas lingkaran}$$

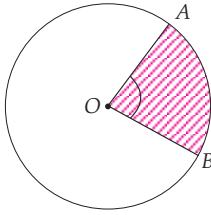
$$= \frac{1}{4} \times \pi r^2$$

$$= \frac{90°}{360°} \times \pi r^2$$

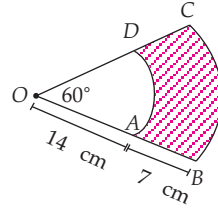
Jika besar sudut pusat $AOE = a°$ maka luas juring AOE sama dengan $\frac{a°}{360°}$ × luas lingkaran. Secara umum dapat ditulis sebagai berikut.

$$\text{Luas juring } AOE = \frac{a°}{360°} \times \pi r^2$$

Contoh SOAL

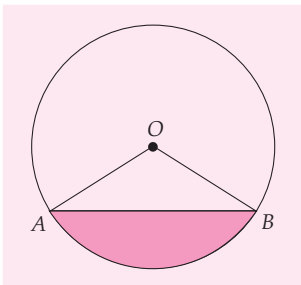
1. Besar sudut pusat $AOB = 90°$ dengan jari-jari 14 cm. Tentukanlah luas juring AOB.

Penyelesaian:

$$\text{Luas juring } AOB = \frac{a°}{360°} \times \pi r^2$$
$$= \frac{90°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$
$$= 154 \text{ cm}^2.$$

2. Pada gambar berikut besar sudut pusat $AOD = 60°$. Panjang sisi $OA = 14$ cm dan $AB = 7$ cm. Hitunglah luas daerah yang diarsir.

Penyelesaian:

$$\text{Luas juring } BOC = \frac{60°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$
$$= 231 \text{ cm}^2.$$
$$\text{Luas juring } AOD = \frac{60°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$
$$= \frac{308}{3} = 102{,}67 \text{ cm}^2$$

Luas daerah yang diarsir
= Luas juring BOC – Luas juring AOD
= $231 \text{ cm}^2 - 102{,}67 \text{ cm}^2$
= $128{,}33 \text{ cm}^2$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah $128{,}33 \text{ cm}^2$.

f. Perhitungan Luas Tembereng

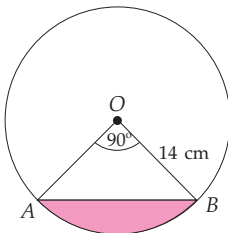
Gambar 6.13 Tembereng

Pada Gambar 6.13, daerah yang diarsir merupakan tembereng. *Tembereng* merupakan daerah yang dibatasi oleh tali busur dan busur.

Untuk menghitung luas tembereng dapat dilakukan dengan mengurangkan luas juring AOB dengan luas segitiga AOB. Secara umum dapat ditulis

Luas tembereng = Luas juring AOB – Luas ΔAOB

Contoh SOAL

Tentukanlah luas tembereng berikut.

Penyelesaian:

L. tembereng = L. juring AOB – L. ΔAOB

$$= \frac{90°}{360°} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 - \frac{14 \times 14}{2}$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 - \frac{14 \times 14}{2}$$
$$= 154 - 98$$
$$= 56 \text{ cm}^2$$

LATIHAN 4

1. Salin dan lengkapilah tabel berikut.

	Sudut Pusat AOB	Jari-jari	Luas juring AOB
a.	36°	14 cm	...
b.	150°	3,5 cm	...
c.	...	14 cm	154 cm^2
d.	...	10 cm	$104\frac{2}{3}$ cm^2
e.	90°	...	38,5 cm^2

2. Tentukanlah luas daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini.

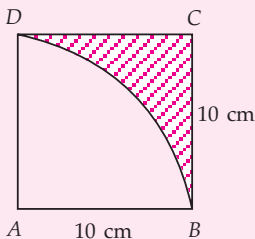
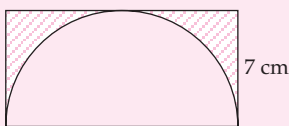
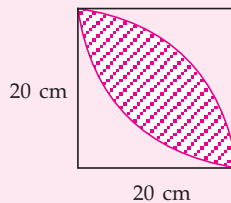
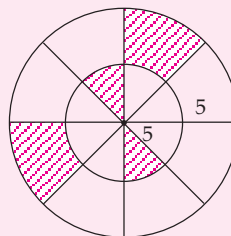
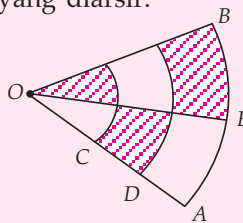
a.

b.

7 cm

c.

20 cm

20 cm

d.

3. $\angle BOE = \angle AOE$, besar sudut $BOA = 60°$, $OC = CD = DA = 7$ cm. Hitunglah luas daerah yang diarsir.

g. Hubungan Sudut Pusat, Panjang Busur dan Luas Juring

Untuk memahami hubungan antara sudut pusat, panjang busur, dan luas juring, coba kalian perhatikan Gambar 6.14. Kemudian, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

Gambar 6.14 Sudut pusat *AOB* dan *COD*

Pada Gambar 6.14 diperlihatkan dua juring, yaitu juring *AOB* dan juring *COD*. Besar sudut pusat *AOB* terlihat sama dengan besar sudut pusat *COD*. Jika juring *AOB* kita gunting dan diletakkan pada juring *COD* maka juring *AOB* menutupi seluruh permukaan bidang juring *COD*. Dari keterangan di atas, berapakah perbandingan:

a. besar sudut pusat *AOB* dan sudut pusat *COD*?

b. panjang busur *AB* dan busur *CD*?

c. luas juring *OAB* dan luas juring *OCD*?

Setelah kalian jawab, bandingkan jawabanmu dengan jawaban teman-temanmu.

Apakah yang dapat kalian simpulkan dari jawaban tersebut, berkaitan dengan hubungan sudut pusat, panjang busur, dan luas juring?

Gambar 6.15 Sudut pusat *AOB* dan *BOC*

Selanjutnya perhatikan Gambar 6.15. Pada Gambar 6.15 diperlihatkan dua juring, yaitu juring *AOB* dan juring *BOC*. Terlihat juring *BOC* adalah bidang yang kembar dengan juring *AOB* karena jika juring *AOB* kita gunting dan diletakkan pada juring *BOC* maka juring *AOB* menutupi seluruh permukaan bidang juring *BOC*. Dari keterangan di atas, berapakah perbandingan:

a. besar sudut pusat *AOB* dan sudut pusat *AOC*?

b. panjang busur *AB* dan panjang busur *AC*?

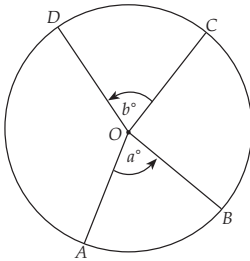
c. luas juring *OAB* dan luas juring *OAC*?

Setelah kalian jawab, bandingkan jawabanmu dengan jawaban teman-temanmu.

Berdasarkan jawaban pertanyaan-pertanyaan dari kedua gambar di atas, *apa yang dapat kalian simpulkan? Diskusikan dengan teman-temanmu, apakah kesimpulan yang kalian dapatkan mengarah pada suatu kesimpulan berikut.*

Math Quiz

Jika $BC = 2\ AB$, berapa bagiankah luas daerah yang diarsir?

> Perbandingan besar sudut pusat kedua juring = perbandingan panjang busur kedua juring = perbandingan luas daerah kedua juringnya.

Agar kesimpulan tadi lebih jelas, perhatikanlah gambar di samping.

Jika besar sudut pusat $AOB = a°$ dan besar sudut pusat $COD = b°$, maka

$$\frac{a°}{b°} = \frac{\text{Panjang busur } AB}{\text{Panjang busur } CD} = \frac{\text{Luas juring } AOB}{\text{Luas juring } COD}$$

Contoh SOAL

1. Pada gambar di samping $\angle AOB = 60°$ dan $\angle COD = 90°$. Jika panjang busur $AB = 24$ cm, tentukanlah panjang busur *CD*.

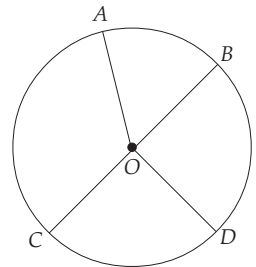
   Penyelesaian:

   $$\frac{\text{Panjang Busur } AB}{\text{Panjang Busur } CD} = \frac{\text{Besar Sudut Pusat } AOB}{\text{Besar Sudut Pusat } COD}$$

   $$\frac{24}{\text{Panjang Busur } CD} = \frac{60°}{90°}$$

   $$\text{Panjang Busur } CD = \frac{24 \times 90°}{60°} = 36 \text{ cm}$$

   Jadi, panjang busur $CD = 36$ cm.

2. Pada gambar berikut besar sudut $AOB = 120°$ dan besar sudut $COD = 80°$. Jika luas juring $AOB = 144\ \text{cm}^2$, hitunglah luas juring *COD*.

Penyelesaian:

$$\frac{\text{Luas Juring } COD}{\text{Luas Juring } AOB} = \frac{\text{Besar Sudut Pusat } COD}{\text{Besar Sudut Pusat } AOB}$$

$$\frac{\text{Luas Juring } COD}{144 \text{ cm}^2} = \frac{80°}{120°}$$

$$\text{Luas Juring } COD = \frac{80°}{120°} \times 144 \text{ cm}^2$$

$$= 96 \text{ cm}^2$$

Jadi, luas juring COD = 96 cm^2.

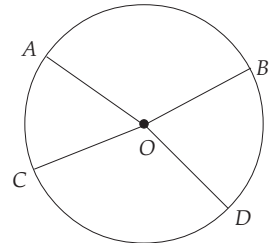
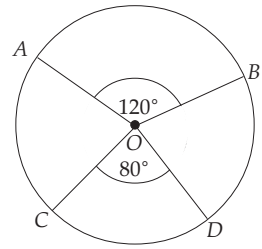
3. Pada gambar di samping luas juring AOB = 24 cm^2 dan luas juring COD = 36 cm^2. Jika panjang busur AB = 12 cm, hitunglah panjang busur CD.

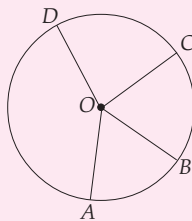
Penyelesaian:

$$\frac{\text{Panjang Busur } AB}{\text{Panjang Busur } CD} = \frac{\text{Luas Juring } AOB}{\text{Luas Juring } COD}$$

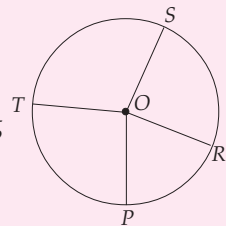
$$\frac{12 \text{ cm}}{\text{Panjang Busur } CD} = \frac{24 \text{ cm}^2}{36 \text{ cm}^2}$$

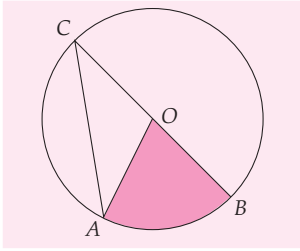
$$\text{Panjang Busur } CD = \frac{36 \text{ cm}^2}{24 \text{ cm}^2} \times 12 \text{ cm}$$

$$= 18 \text{ cm}$$

LATIHAN 5

1. Pada gambar di samping $\angle AOB$ = 60° dan $\angle COD$ = 80°. Jika panjang busur AB = 24 cm, hitunglah panjang busur CD.

2. Salin dan lengkapilah tabel berikut.

	Sudut *AOB*	Sudut *COD*	Panjang Busur AB	Panjang Busur *CD*
a	60°	90°	12 cm	...
b	45°	60°	...	24 cm
c	...	72°	60 cm	40 cm
d.	36°	...	48 cm	36 cm

3. Pada gambar di samping $\angle POR$ = 72° dan $\angle TOS$ = 108°. Jika luas juring POR = 150 cm^2, hitunglah luas juring TOS.

4. Salin dan lengkapilah tabel berikut.

	Sudut *POR*	Sudut *TOS*	Luas Juring *POR*	Luas Juring *TOS*
a	100°	80°	40 cm^2	...
b	80°	60°	...	90 cm^2
c	...	48°	45 cm^2	60 cm^2
d.	60°	...	72 cm^2	90 cm^2

Gambar 6.16 Sudut pusat *AOB* dan sudut keliling *ACB*

h. Hubungan Sudut Pusat dan Sudut Keliling

Pada Gambar 6.16 $\angle AOB$ adalah sudut pusat lingkaran dan $\angle ACB$ adalah sudut keliling lingkaran. Keduanya menghadap busur yang sama, yaitu busur *AB*.

Untuk melihat hubungan sudut pusat dan sudut keliling pada gambar tersebut, coba kerjakan kegiatan berikut secara kelompok.

1. Buatlah sudut pusat *AOB* dan sudut keliling *ACB* seperti Gambar 6.16 pada selembar kertas karton.
2. Guntinglah ΔAOC pada karton tadi.
3. Letakkan ΔAOC yang telah digunting tadi di atas sudut pusat *AOB*, sehingga garis *CO* pada ΔAOC sejajar dan tepat menempel pada garis *OB*. *Mengapa garis CO dan garis OB dapat menempel tepat? Berikan alasannya.*

Setelah kalian melakukan kegiatan di atas, selanjutnya jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Apakah $\angle AOB$ lebih kecil dari $\angle ACO$?
2. Ukur dengan penggaris busur besar $\angle AOB$ dan $\angle ACO$. Berapakah perbandingan besar sudut pusat *AOB* dengan sudut keliling *ACO*?
3. Bagaimana hubungan $\angle AOB$ dan $\angle ACO$?
   $\angle AOB = ... \times \angle ACO$ atau $\angle ACO = ... \times \angle AOB$

Dari jawaban pertanyaan-pertanyaan kegiatan di atas, apa yang dapat kalian simpulkan? Diskusikanlah dengan teman-temanmu. Apakah kesimpulan yang kalian dapatkan mengarah pada suatu kesimpulan berikut.

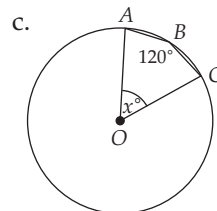
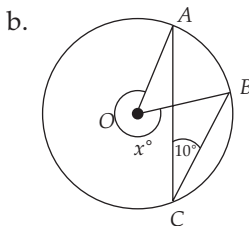
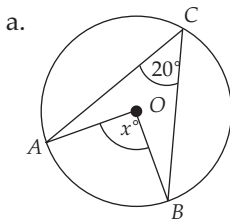
> Sudut pusat sama dengan 2 kali sudut keliling atau sudut keliling sama dengan $\frac{1}{2}$ kali sudut pusat.

Contoh SOAL

Hitunglah nilai $x°$ dari gambar di bawah ini.

a.

b.

c.

Penyelesaian:

a. $\angle AOB = x°$
   Sudut *AOB* dan sudut *ACB* menghadap busur yang sama, yaitu busur *AB* maka

$$\angle AOB = 2(\angle ACB) = 2(20°) = 40°$$

b. Sudut AOB dan ACB menghadap busur yang sama, yaitu busur AB maka

$\angle AOB = 2(\angle ACB)$
$= 2(10°) = 20°$
$x° = 360° - \angle AOB$
$= 360° - 20° = 340°$

c. $\angle AOC = 2(\angle ABC) = 2(120°)$
$= 240°$
$x° = 360° - \angle AOC$
$= 360° - 240°$
$= 120°$

i. Sifat-Sifat Sudut Keliling

1) *Sudut Keliling yang Menghadap Diameter Lingkaran*

Pada Gambar 6.17, sebutkan sudut yang merupakan sudut pusat dan sudut keliling. Selanjutnya akan kita tunjukkan salah satu sifat sudut keliling.

Gambar 6.17 Sudut ABC menghadap diameter AB

Pada Gambar 6.17, AC adalah diameter lingkaran dengan titik O pusat lingkaran. Besar sudut $AOC = 180°$ (sudut lurus). $\angle ABC$ adalah sudut keliling yang menghadap diameter AC. Akan kita cari besar $\angle ABC$.

Agar kalian memahami sifat sudut keliling ABC tersebut, coba ingat kembali hubungan sudut pusat dengan sudut keliling yang telah dipelajari sebelumnya.

Selanjutnya, salin pada buku tulismu dan lengkapilah titik-titiknya.

$\angle ABC$ merupakan sudut ... dan $\angle AOC$ merupakan sudut ...
$\angle ABC$ dan $\angle AOC$ menghadap busur yang sama, yaitu busur ...
$\angle AOC = 180$, maka $\angle ABC = ... \times \angle AOC$
$= ... \times 180°$
$= ...$

Setelah melengkapi titik-titik di atas, *apa yang dapat kalian simpulkan mengenai sifat dari sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran? Diskusikan dengan teman-temanmu. Apakah kesimpulan yang kalian dapatkan mengarah pada suatu kesimpulan* bahwa pada setiap lingkaran berlaku:

> Besar sudut keliling yang menghadap diameter adalah siku-siku (90°)

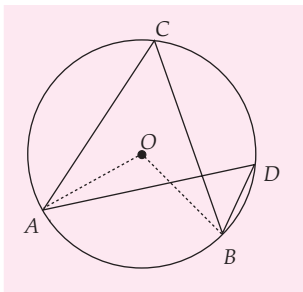
2) *Sudut-Sudut Keliling yang Menghadap Busur yang Sama*

Selanjutnya, kalian akan ditunjukkan sifat yang lain dari sudut keliling, yaitu sifat sudut-sudut keliling yang menghadap busur yang sama.

Perhatikan Gambar 6.18. Pada Gambar 6.18 $\angle ADB$ adalah sudut keliling dan $\angle AOB$ adalah sudut pusat. $\angle ADB$ dan $\angle AOB$ menghadap busur yang sama, yaitu busur AB sehingga berlaku

$\angle AOB = ... \times \angle ADB$ ....(1)

Math Quiz

Coba kalian buktikan pada gambar di atas bahwa $\angle PQR + \angle PSR = 180°$, dengan menggunakan hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling. Setelah itu diskusikan dengan teman-temanmu, apakah yang dapat kalian simpulkan dari pembuktian tersebut?

Gambar 6.18 Dua sudut keliling menghadap busur yang sama

Pada Gambar 6.18 juga terlihat $\angle ACB$ adalah sudut keliling dan $\angle AOB$ adalah sudut pusat. $\angle ACB$ dan $\angle AOB$ menghadap busur yang sama, yaitu busur ...

sehingga berlaku $\angle AOB$ = ... × $\angle ACB$ ....(2)

Substitusikan persamaan (1) ke persamaan (2) sehingga diperoleh:

$\angle ADB$ = sudut .... ($\angle ADB$ dan $\angle ACB$ adalah sudut keliling yang menghadap busur yang sama, yaitu busur ....)

Setelah melengkapi titik-titik di atas, *apa yang dapat kalian simpulkan mengenai sifat dari sudut-sudut keliling yang menghadap busur yang sama? Diskusikanlah dengan teman-temanmu, apakah kesimpulan yang kalian dapatkan mengarah pada suatu kesimpulan* bahwa pada setiap lingkaran berlaku:

> Sudut keliling yang menghadap busur yang sama adalah sama besar.

Contoh SOAL

1. Pada gambar di samping, besar sudut AOB = 100°. Jika panjang $AC = BC$, hitunglah:
   a. besar $\angle ACB$
   b. besar $\angle CAO$

Penyelesaian:

a. Besar sudut $ACB = \frac{1}{2}(100°) = 50°$

b. AOC adalah segitiga sama kaki karena $AO = OC$, maka

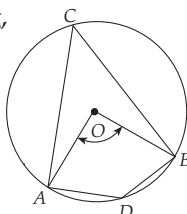
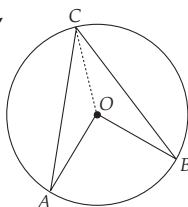
$$\angle ACO = \frac{1}{2}(\angle ACB) = \frac{1}{2}(50^o) = 25°$$

$$\angle CAO = \angle ACO = 25°$$

2. Pada gambar di samping, $\angle AOB$ = 110°. Hitunglah:

   a. besar $\angle ACB$
   b. besar $\angle ADB$

Penyelesaian:

a. Besar $\angle ACB = \frac{1}{2}(110°) = 55°$

b. Besar $\angle ADB = \frac{1}{2}$(sudut refleks AOB)

$$= \frac{1}{2}(360° - 110°) = \frac{1}{2}(250^o) = 125°$$

3. Pada gambar di samping, $ABCD$ adalah segi empat sembarang. BD adalah diameter, $\angle DBC$ = 40°, dan $\angle ADB$ = 20°. Hitunglah:

   a. $\angle ADC$
   b. $\angle ABC$

Penyelesaian:

Karena $\angle DAB$ dan $\angle DCB$ menghadap pada diameter yang sama yaitu DB, maka $\angle DAB = \angle DCB$ = 90°.

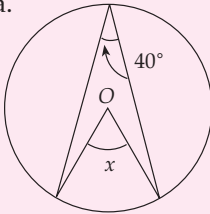
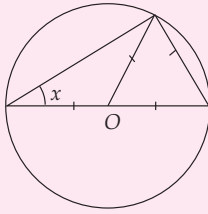
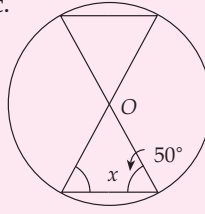
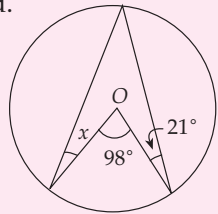
$\angle BDC$ = 180° – 90° – 40° = 50°

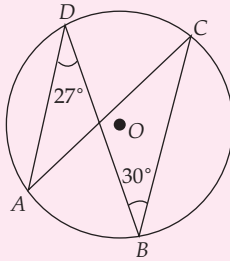
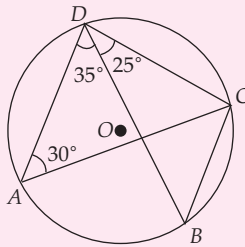
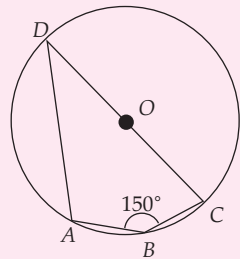
$\angle ABD$ = 180° – 90° – 20° = 70°

a. $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC$ = 20° + 50° = 70°

b. $\angle ABC = \angle DBC + \angle ABD$ = 40° + 70° = 110°

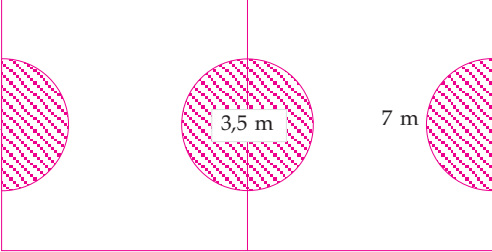
LATIHAN 6

1. Hitunglah nilai x dari gambar di bawah ini.

a.
b.
c.
d.
2. Pada gambar di samping ini, $\angle DBC = 30°$ dan $\angle ADB = 27°$. Tentukanlah:
   a. $\angle DAC$
   b. $\angle ACB$

3. Pada gambar di samping ini, $\angle CAD = 30°$, $\angle ADB = 35°$, dan $\angle ADC = 60°$. Tentukanlah:
   a. $\angle CBD$
   b. $\angle BCA$
   c. $\angle ACD$

4. Perhatikan gambar di samping ini. Jika $\angle BOC = 88°$, tentukanlah:
   a. $\angle OBC$
   b. $\angle BAC$

5. Gambar di samping ini adalah sebuah lingkaran dengan pusat O dan $\angle ABC = 150°$. Hitunglah $\angle ADC$.

C Aplikasi Konsep Lingkaran dalam Kehidupan

Dalam kehidupan sehari-hari banyak benda di sekitar kita yang bentuknya adalah lingkaran seperti roda kendaraan, dan keping uang logam. Kita dapat menghitung keliling dan luas lingkaran yang diinginkan.

Contoh SOAL

Sebuah roda sepeda mempunyai diameter 105 cm. Berapa kali roda sepeda tersebut berputar untuk menempuh jarak 660 m?

Penyelesaian:

$$\text{Banyak roda berputar} = \frac{\text{Jarak}}{\text{Keliling Roda}}$$

$$= \frac{660 \text{ m}}{\frac{22}{7} \times 105 \text{ cm}}$$

$$= \frac{660 \text{ m}}{330 \text{ cm}}$$

$$= \frac{66.000 \text{ cm}}{330 \text{ cm}}$$

$$= 200 \text{ kali}$$

Jadi, roda itu berputar sebanyak 200 kali.

Soal-Soal Kontekstual

1. Sebuah keping piringan hitam diameternya 30 cm. Jika keping piringan hitam itu dimasukkan ke dalam sampul persegi, hitunglah luas persegi minimum tersebut.
2. Sebuah mobil mempunyai roda yang jari-jarinya 20 cm. Jika mobil menempuh jarak 33 km, berapa kali roda mobil berputar?
3.

   Pada gambar lapangan di atas, daerah yang diarsir akan dicat. Jika 1 liter cat dapat mengecat 50 m^2, berapa banyak cat yang diperlukan?
4. Seorang anak mengendarai sepeda yang jari-jari rodanya 30 cm. Ia melakukan 20.000 kayuhan. Seorang anak yang lain menempuh jarak tersebut dengan mengendarai sepeda yang diameter rodanya 90 cm.
   a. Berapa jarak yang ditempuh anak I?
   b. Berapa kali anak ke II mengayuh sepedanya?
5. Seorang atlet mengendarai sepeda dengan roda sepeda yang berdiameter 70 cm. Jarak yang ditempuh adalah 22 km. Jika dalam satu menit ia dapat mengayuh sebanyak lima kali dan satu kayuhan berarti roda sepeda berputar 1 kali, berapa waktu yang dibutuhkan untuk menempuh jarak tersebut?
6. Permainan bianglala di Dunia Fantasi (DUFAN) bentuknya seperti gambar di bawah ini. Untuk sekali putaran diperlukan waktu 45 detik. Seorang anak naik permainan tersebut dan berputar selama 15 menit. Tentukan banyak putaran yang ditempuh oleh anak tersebut.

Sumber: Physics for Scientist and Engineers Prentice Hall

Kerjakan kegiatan ini secara kelompok.

Sediakanlah sebuah jam dinding atau jika dikelasmu terdapat jam dinding, gunakanlah jam dinding tersebut. Ukurlah panjang jarum panjangnya. Jika jarum panjang tersebut dianggap sebagai jari-jari lingkaran,

a. berapakah jarak yang ditempuh jarum panjang selama 1 menit?
b. berapakah jarak yang ditempuh jarum panjang selama 1 jam?
c. berapa banyak putaran yang diperlukan oleh jarum panjang jam untuk bergerak dari pukul 07.00 sampai dengan pukul 12.00? Berapakah jarak yang ditempuhnya?

RANGKUMAN

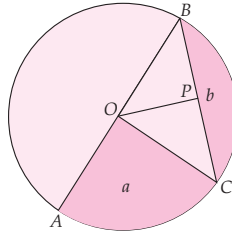
1. AB adalah diameter lingkaran.

   OA, OB adalah jari-jari lingkaran, dan BC adalah tali busur.

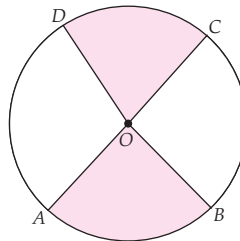
   Bidang a adalah juring

   Bidang b adalah tembereng

   Garis lengkung AB, AC, dan BC merupakan busur lingkaran.

   OP adalah apotema.

2. Keliling lingkaran $= \pi d$ atau $= 2\pi r$

   Luas lingkaran $= \frac{1}{4}\pi d^2$ atau $= \pi r^2$

3. $$\frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{\text{Panjang busur } AB}{\text{Panjang busur } CD} = \frac{\text{Luas juring } AOB}{\text{Luas juring } COD}$$

4. Sudut keliling lingkaran $= \frac{1}{2} \times$ sudut pusat lingkaran
5. Besar sudut keliling yang menghadap busur yang sama adalah sama.
6. Besar sudut keliling yang menghadap diameter adalah 90°.

Uji Kompetensi Bab 6

A Pilihan ganda

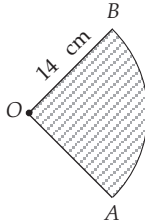
Berilah tanda silang (×) pada huruf a, b, c, atau d pada jawaban yang benar.

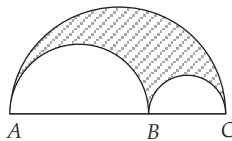
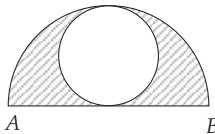
1. Suatu lingkaran kelilingnya 22 cm. Jari-jari lingkaran itu adalah ....
   a. 3,5 cm c. 10,5 cm
   b. 7 cm d. 14 cm

2. Suatu lingkaran kelilingnya 44 cm. Luas lingkaran itu adalah ....
   a. 22 cm^2 c. 99 cm^2
   b. 77 cm^2 d. 154 cm^2

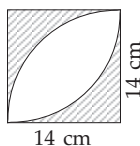
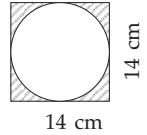
3. Jika luas lingkaran 616 cm^2 maka keliling lingkaran adalah ....
   a. 22 cm c. 66 cm
   b. 44 cm d. 88 cm

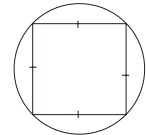
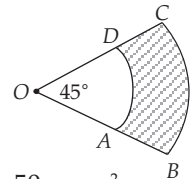
4. Pada gambar di samping $\angle AOB = 90°$. Keliling dan luas daerah yang diarsir adalah ....

   a. 22 cm dan 616 cm^2
   b. 22 cm dan 154 cm^2
   c. 50 cm dan 154 cm^2
   d. 50 cm dan 616 cm^2

5. Pada gambar di samping panjang AB = 14 cm dan BC = 7 cm. Keliling daerah yang diarsir adalah ....

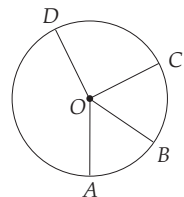
   a. 82 cm c. 120 cm
   b. 90 cm d. 132 cm

6. Perbandingan luas daerah yang diarsir dan yang tidak diarsir adalah ....

   a. 1 : 1 c. 2 : 3
   b. 1 : 2 d. 2 : 5

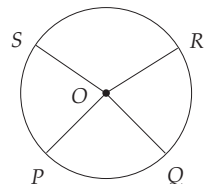
7. Keliling daerah yang diarsir adalah ....

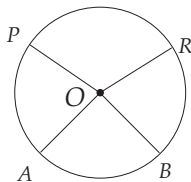
   a. 22 cm
   b. 44 cm
   c. 56 cm
   d. 100 cm

8. Luas daerah yang diarsir adalah ....
   a. 42 cm^2
   b. 154 cm^2
   c. 108 cm
   d. 196 cm^2

9. Pada gambar di samping diameter lingkaran adalah 14 cm. Luas persegi terbesar adalah ....

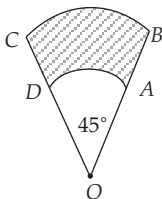
   a. 49 cm^2 c. 98 cm^2
   b. 64 cm^2 d. 196 cm^2

10. Panjang $OA = 2AB$. Jika OB = 30 cm maka luas daerah yang diarsir adalah ....

   a. 12,5 π cm^2 c. 50 π cm^2
   b. 22,5 π cm^2 d. 62,5 π cm^2

11. Perbandingan luas lingkaran yang diameternya 9 cm dan 12 cm adalah ....
   a. 3 : 4 c. 9 : 12
   b. 5 : 4 d. 9 : 16

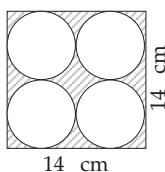
12. Perhatikanlah gambar di samping, $\angle AOB$ = 60° dan $\angle COD$ = 80°. Panjang AB = 12 cm, panjang CD adalah ....

   a. 8 cm c. 9 cm
   b. 15 cm d. 16 cm

13. Pada gambar di samping luas juring POQ = 36 cm^2 dan luas juring SOR = 48 cm^2. Jika besar sudut POQ = 60° maka besar sudut SOR adalah ....

   a. 20° c. 48°
   b. 30° d. 80°

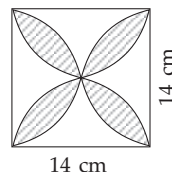
14. Diketahui luas juring AOB = 60 cm^2 dan luas juring POR = 90 cm^2. Jika panjang busur PR = 36 cm maka panjang busur AB adalah ....

a. 24 cm
b. 27 cm
c. 29 cm
d. 32 cm

15. Pada gambar di samping OA : AB = 3 : 1. Jika panjang OB = 28 cm maka keliling daerah yang diarsir adalah ....

a. 44 cm
b. 52,5 cm
c. 77 cm
d. 91 cm

16. Luas daerah yang diarsir adalah ....

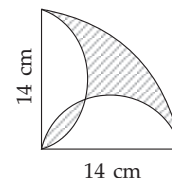
a. 42 cm^2
b. 77 cm^2
c. 154 cm^2
d. 196 cm^2

17. Sebuah roda menempuh jarak sejauh 110 km. Jika jari-jari roda 35 cm, roda berputar sebanyak ....

a. 5.000 kali
b. 50.000 kali
c. 500.000 kali
d. 5.000.000 kali

18. Luas daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah ....

a. 21 cm^2
b. 84 cm^2
c. 28 cm^2
d. 112 cm^2

19. Keliling daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah .....

14 cm

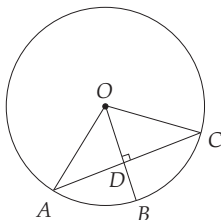
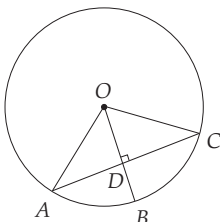
14 cm

a. 22 cm
b. 44 cm
c. 55 cm
d. 66 cm

20. Sebuah juring yang luasnya 77 cm^2 mempunyai diameter 28 cm. Keliling juring tersebut adalah ....

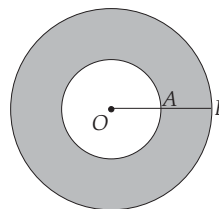
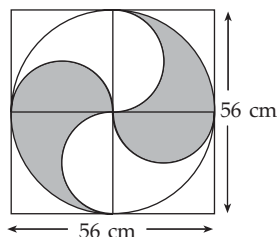
a. 28 cm
b. 39 cm
c. 56 cm
d. 72 cm

B Esai

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini.

1. a. AC = 48 cm dan OA = 25 cm. Hitunglah OD.

b. OB = 20 cm dan BD = 4 cm. Hitunglah AC.

2. Hitunglah keliling dan luas lingkaran, jika diketahui:
   a. jari-jari = 14 cm
   b. diameter = 10,5 cm

3. Keliling lingkaran 44 cm. Hitunglah luas lingkaran.

4. Pada gambar OA = 7 cm dan AB = 3,5 cm. Hitunglah luas daerah yang diarsir.

5. Hitunglah luas daerah yang diarsir.

BAB 7

Garis Singgung Lingkaran

Sumber: Physics for scientists and Engineers Prentice Hall

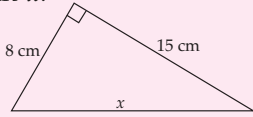
Tujuan Pembelajaran

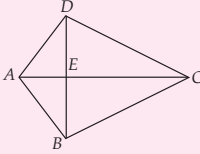
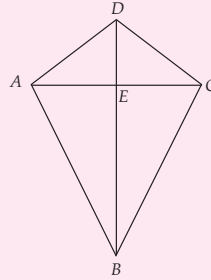
- Mengenal garis singgung lingkaran dan sifat-sifatnya
- Melukis garis singgung lingkaran
- Memahami cara menentukan panjang garis singgung persekutuan dua lingkaran
- Memahami cara menggambar lingkaran dalam dan luar suatu segitiga.

Di bab sebelumnya telah dipelajari menentukan panjang sisi sebuah segitiga siku-siku, dengan menggunakan teorema Pythagoras, masih ingatkah kalian? Apakah kalian juga masih ingat dengan sifat-sifat dari layang-layang? Bagaimana dengan luas layang-layang, masih ingatkah kalian. Materi-materi yang ditanyakan itu akan digunakan pada bab ini. Perhatikan gambar di atas.

Tahukah kalian nama mesin pada gambar di atas? Dapatkah kalian menghitung panjang rantai yang menghubungkan kedua roda gerigi dari mesin tersebut hanya dengan menggunakan penggaris atau meteran? Tentunya sulit, bukan? Agar kalian mudah untuk menentukan panjang rantai roda mesin itu, pelajarilah pembahasan pada bab ini. Setelah mempelajari bab ini kalian pasti akan mengetahui cara yang mudah untuk menghitungnya.

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Hitunglah x.

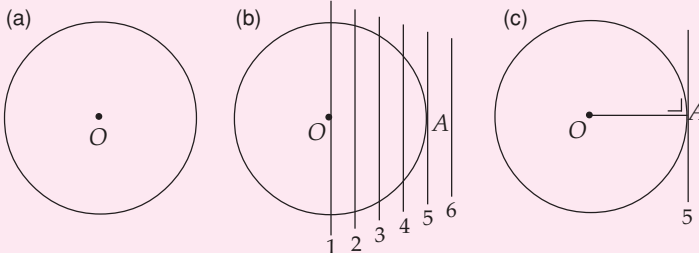
2. Jika sisi AB = 12 cm, BC = 16 cm, dan AC = 20 cm, hitunglah panjang BD.

3. $ABCD$ adalah layang-layang. Tentukan pasangan garis yang sama panjang.

A Sifat-Sifat Garis Singgung Lingkaran

Pada bagian sebelumnya telah kita pelajari lingkaran dan besaran-besaran pada lingkaran. Pada bagian ini akan kita bahas garis singgung lingkaran dan sifat-sifatnya. Untuk lebih jelasnya perhatikan pembahasan berikut.

1 Sifat Sudut yang Dibentuk Oleh Garis yang Melalui Titik Pusat dan Garis Singgung Lingkaran

Untuk memahami sudut yang dibentuk oleh garis yang melalui titik pusat dan garis singgung lingkaran, coba kalian lakukan kegiatan berikut.

KEGIATAN

1. Lukislah sebuah lingkaran dan beri nama titik pusatnya O.
2. Gambarlah sebuah garis melalui titik O.
   Beri nama garis tersebut garis 1.
3. Gambarlah beberapa garis yang sejajar garis 1.
   Sekarang, perhatikan garis 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.
   Garis 1, 2, 3, dan 4 memotong lingkaran di dua titik.

Gambar 7.1 (a) lingkaran dengan titik pusat O; (b) garis-garis yang sejajar garis 1; (c) garis 5 sebagai garis singgung lingkaran

Garis 5 menyinggung lingkaran/memotong lingkaran di satu titik, misal titik *A*. Seperti itulah yang dinamakan garis singgung. Dengan demikian, garis 5 merupakan garis singgung lingkaran.

Garis 6 tidak memotong lingkaran.

4. Buat garis dari titik potong garis 5 dengan lingkaran ke titik *O*. Setelah itu, ukurlah sudut yang dibentuk garis tersebut dengan garis 5 menggunakan penggaris busur.

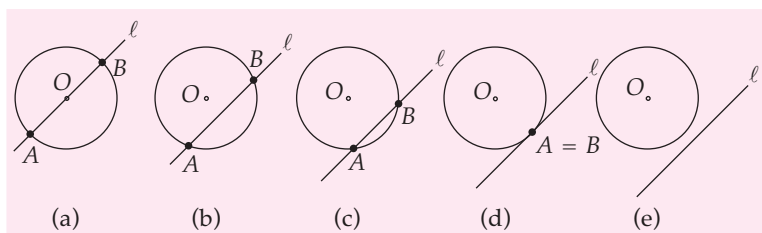
   Jika teliti akan kalian peroleh bahwa sudut yang dibentuk oleh garis *OA* dan garis 5 adalah 90°. Garis *OA* merupakan jari-jari lingkaran. Dengan demikian, dapat ditarik kesimpulan bahwa

Garis singgung lingkaran adalah suatu garis yang memotong lingkaran hanya di satu titik dan tegak lurus dengan jari-jari lingkaran pada titik singgung lingkaran itu.

Sifat garis singgung lingkaran adalah selalu tegak lurus dengan jari-jari lingkaran yang melalui titik singgungnya.

Sekarang, *coba kalian temukan dan tentukan sifat dari sudut yang dibentuk oleh garis yang melalui titik pusat dan garis singgung lingkaran dalam kegiatan yang telah kalian lakukan tadi. Diskusikanlah dengan kelompokmu. Kalau kalian masih bingung mintalah petunjuk dari gurumu.*

2 Dari Suatu Titik pada Lingkaran Hanya Dapat Dibuat Satu Garis Singgung

Pelajarilah penjelasan gambar-gambar di bawah ini.

Gambar 7.2 Kedudukan suatu garis pada lingkaran.

Pada Gambar 7.2 (a) diperlihatkan bahwa garis *l* memotong lingkaran di dua titik, yaitu titik *A* dan *B*. Garis *l* juga melalui titik pusat lingkaran, yaitu titik *O*. Pada Gambar 7.2 (b) garis *l* digeser sejajar menjauhi *O*, garis *l* tetap memotong lingkaran di dua titik, yaitu titik *A* dan *B*. Garis *l* yang berada di dalam lingkaran pada Gambar 7.2 (b) lebih pendek dari panjang garis pada Gambar 7.2 (a). Pada Gambar 7.2 (c) garis *l* tetap memotong lingkaran di dua titik dan panjang garis *AB* yang berada di dalam lingkaran makin berkurang.

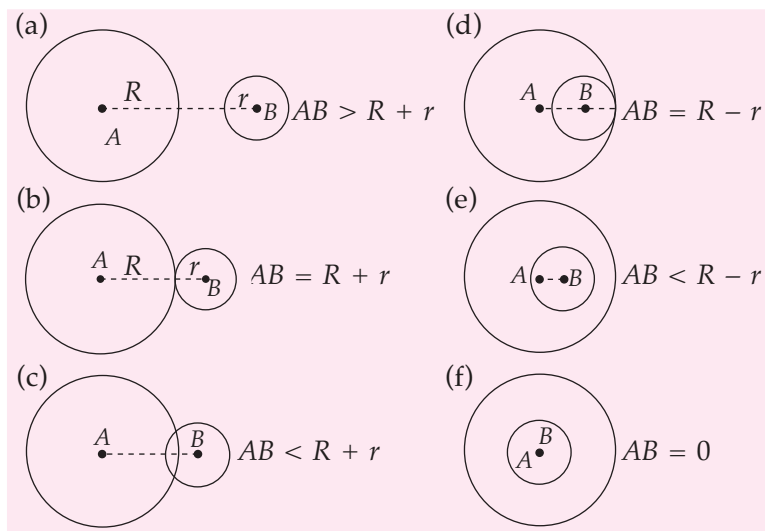
Pada Gambar 7.2 (d), titik *A* dan *B* berimpit pada keliling lingkaran atau panjang $AB = 0$. Keadaan seperti ini dapat dikatakan bahwa garis *l* menyinggung lingkaran di titik *A*

atau B (karena titik A dan B berimpit). Pada Gambar 7.2 (e) garis l tidak memotong atau menyinggung lingkaran karena garis l berada di luar lingkaran.

Dari keterangan yang telah kalian simak di atas tadi, *gambar manakah menurut kalian yang memperlihatkan bahwa garis l adalah garis singgung lingkaran dan pada titik manakah itu? Dapatkah kalian menggambarkan garis singgung lain yang melalui titik singgung tadi? Diskusikan dengan teman-temanmu mengenai jawaban pertanyaan-pertanyaan tadi.*

Setelah kalian menjawab pertanyaan-pertanyaan di atas, apa yang dapat kalian simpulkan mengenai banyaknya garis singgung yang mungkin dibuat melalui suatu titik pada lingkaran?

3 Kedudukan Dua Lingkaran

Perhatikan gambar berikut ini.

Gambar 7.3 Kedudukan dari dua lingkaran.

Ada dua lingkaran dengan jari-jari R dan r. Jari-jari R lebih panjang daripada jari-jari r ($R > r$). Garis yang menghubungkan pusat lingkaran R dan r disebut *garis sentral* (*pusat*). Kedudukan dari dua lingkaran tersebut dapat terjadi seperti berikut.

1) Pada Gambar 7.3 (a) letak lingkaran R dan r saling lepas.
2) Pada Gambar 7.3 (b) letak lingkaran R dan r saling bersinggungan luar.
3) Pada Gambar 7.3 (c) letak lingkaran R dan r saling berpotongan.
4) Pada Gambar 7.3 (d) letak lingkaran R dan r saling bersinggungan dalam.

5) Pada Gambar 7.3 (e) letak lingkaran r di dalam lingkaran R.
6) Pada Gambar 7.3 (f) letak lingkaran R dan r sepusat atau konsentris.

Dari keterangan gambar di atas, sekarang coba kalian sebutkan dengan kata-katamu sendiri (di depan kelas), syarat bahwa dua lingkaran:

a. saling lepas;
b. saling bersinggungan dari luar;
c. saling berpotongan;
d. saling bersinggungan dari dalam;
e. salah satu lingkaran ada di dalam lingkaran yang lain;
f. sepusat (kosentris).

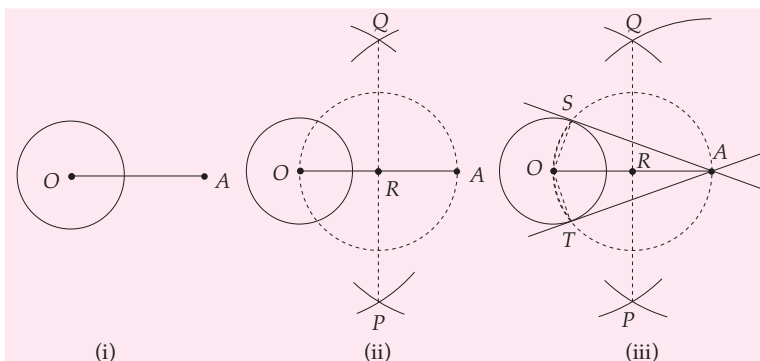
B Panjang Garis Singgung

Pada subbab sebelumnya telah kita pelajari pengertian garis singgung lingkaran. Pada subbab kali ini akan dibahas cara melukis garis singgung lingkaran dan menghitung panjang garis singgung tersebut. Untuk lebih jelasnya perhatikan pembahasan berikut.

1 Cara Melukis dan Menghitung Panjang Garis Singgung dari Sebuah Titik di Luar Lingkaran

Sekarang, kita akan mempelajari cara melukis dan menghitung panjang garis singgung dari sebuah titik di luar lingkaran. Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 7.4.

Sumber: Buku Saku Penemuan, Erlangga

Gambar 7.5 Benang pada alat pemintal saat digunakan dapat membentuk garis singgung lingkaran roda dari sebuah titik pada gulungan benangnya.

Gambar 7.4 Melukis garis singgung melalui titik A yang terletak di luar lingkaran

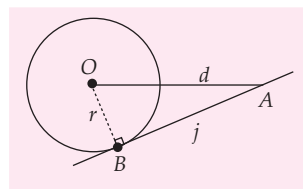
Pada Gambar 7.4, titik A berada di luar lingkaran dengan pusat O. Untuk melukis garis singgung yang melalui titik A yang terletak di luar lingkaran, perhatikan langkah-langkah berikut.

(i) Hubungkan titik A dengan O.
(ii) Lukislah busur-busur dengan jari-jari OA dengan pusat lingkaran di titik O dan di titik A sehingga busur-busur tersebut berpotongan di P dan Q. Tarik garis dari P ke Q sehingga memotong OA dan tegak lurus di R.

(iii) Lukis lingkaran dengan pusat R dan jari-jari OR sehingga memotong lingkaran O di S dan T. Selanjutnya, tarik garis dari A ke S dan dari A ke T, sehingga diperoleh garis AS dan AT. *Apakah garis AS dan AT merupakan garis singgung A pada lingkaran O?*

Dapatkah kalian membuktikan bahwa garis AS dan AT pada Gambar 7.4 (iii) adalah garis singgung? Sekarang, coba perhatikan Gambar 7.4(iii). Pada ΔAOS, $\angle ORA$ adalah sudut yang menghadap busur setengah lingkaran sehingga besar $\angle ORA = 180°$ (sudut lurus). Oleh karena $\angle ASO$ adalah sudut keliling yang menghadap busur yang sama dengan sudut pusat ORA, maka berlaku $\angle ASO = \frac{1}{2} \angle ORA = 90°$. Ini berarti garis $AS \perp$ jari-jari OS. Jadi, garis AS adalah garis singgung titik A ke lingkaran O.

Sekarang dengan cara yang sama, *coba kalian buktikan bahwa garis AT juga garis singgung titik A ke lingkaran O. Bandingkan hasil pembuktianmu dengan teman-teman yang lain.* Selanjutnya untuk memahami cara menentukan panjang garis singgung dari sebuah titik di luar lingkaran, perhatikan penjelasan Gambar 7.6 berikut ini.

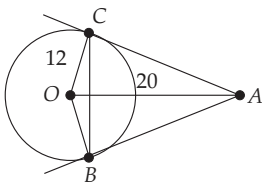
Pada Gambar 7.6, sebuah lingkaran berjari-jari r dengan pusat O dan titik A di luar lingkaran. Jarak O ke titik A adalah d. Sebuah garis melalui titik A dan menyinggung lingkaran di titik B. Akibatnya terbentuk segitiga siku-siku OBA yang siku-siku di B. Dengan menggunakan dalil Pythagoras, panjang AB dapat ditentukan.

Gambar 7.6 Panjang garis singgung AB

$$(AB)^2 = (OA)^2 - (OB)^2 \quad \text{atau} \quad j = \sqrt{d^2 - r^2}$$

dengan j : panjang garis singgung
d : jarak pusat lingkaran O ke titik A
r : jari-jari lingkaran

Agar kalian memahami penggunaan rumus di atas, pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh SOAL

Dua buah garis melalui titik A dan menyinggung lingkaran di titik B dan C. Jika jari-jari lingkaran 12 cm dan jarak A ke pusat O adalah 20 cm, hitunglah panjang BC.

Penyelesaian:

$OA = 20$ cm dan $OC = 12$ cm

ΔAOC siku-siku di C, maka berlaku

$AC^2 = OA^2 - OC^2$
$= 20^2 - 12^2$
$= 256 \text{ cm}^2$

$AC = 16$ cm

$OB = OC =$ jari-jari lingkaran $= 12$ cm

ΔAOB siku-siku di B, maka berlaku

$$AB^2 = OA^2 - OB^2$$
$$= 20^2 - 12^2$$
$$= 256 \text{ cm}^2$$
$$AB = 16 \text{ cm}$$

Karena sisi-sisi segi empat $OBAC$ dibentuk oleh 2 jari-jari lingkaran (OB dan OC) dan 2 garis singgung (AB dan AC), maka segi empat $OBAC$ disebut layang-layang.

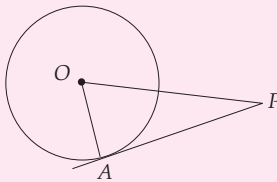
Selanjutnya, kita dapat menghitung panjang BC sebagai berikut.

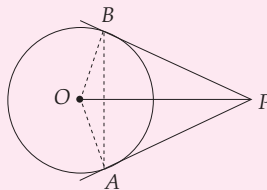
Luas layang-layang = $\frac{1}{2}$ ($OA \times BC$) dan

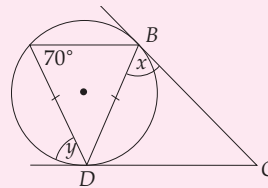
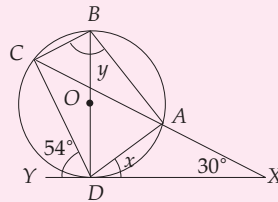
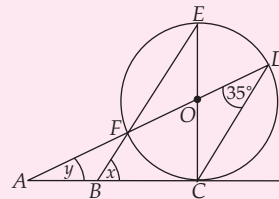
Luas layang-layang = 2 × luas Δ siku-siku

$$\frac{1}{2}(OA \times BC) = 2 \times \frac{1}{2} OC \times AC$$
$$(20 \times BC) = 2 \times 12 \times 16$$
$$BC = \frac{2 \times 12 \times 16}{20}$$
$$= 19{,}2 \text{ cm}$$

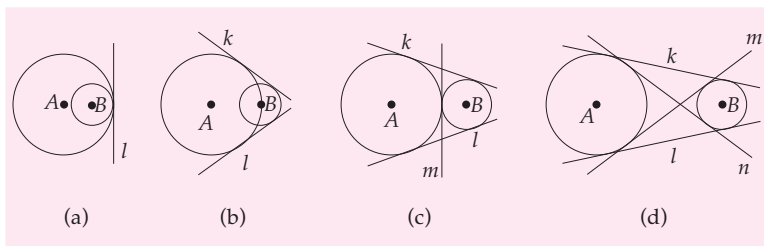
LATIHAN 1

1. Berdasarkan gambar di bawah, lengkapilah tabel berikut.

	OA	AP	OP
a	12	....	25
b	3	4	....
c	....	9	41
d	8	....	17

2. Pada gambar di samping ini, PB dan PA adalah garis singgung. Jika $\angle APB = 60°$ dan $OB = 12$ cm, hitunglah:
   a. OP b. PB c. AB

3. Hitunglah x dan y dari gambar-gambar di bawah ini.

   a.

   b.

   c.

2 Cara Melukis dan Menghitung Garis Singgung Persekutuan Dua Lingkaran

a. Garis Singgung Persekutuan Dua Lingkaran

Setelah kalian mengetahui garis singgung dari suatu lingkaran, selanjutnya kita akan mempelajari garis singgung persekutuan dari dua lingkaran. Untuk lebih jelaslah perhatikan gambar berikut ini.

Gambar 7.7 Garis singgung persekutuan dari dua lingkaran

Dari gambar di atas, banyaknya garis singgung persekutuan dari dua lingkaran dapat dijelaskan sebagai berikut.

(a) Lingkaran A dan lingkaran B mempunyai 1 garis singgung persekutuan, yaitu garis l.

(b) Lingkaran A dan lingkaran B mempunyai 2 garis singgung persekutuan luar, yaitu garis k dan l.

(c) Lingkaran A dan lingkaran B mempunyai 2 garis singgung persekutuan luar, yaitu garis k dan l, serta 1 garis singgung persekutuan dalam, yaitu garis m.

Selanjutnya coba kalian tentukan sendiri, ada berapa banyak garis singgung persekutuan luar dan garis persekutuan dalam yang dapat dibuat pada Gambar 7.7(d) di atas. Bandingkan jawabanmu dengan mempelajari subbab berikutnya.

b. Garis Singgung Persekutuan Luar

1) Melukis Garis Singgung Persekutuan Luar

Sekarang, tentunya kalian sudah jelas mengenai cara menentukan garis singgung persekutuan dari dua lingkaran. Selanjutnya, bagaimanakah cara untuk melukis garis singgung persekutuan luar dari dua lingkaran? Untuk mengetahuinya pelajari penjelasan di bawah ini.

Cara melukis garis singgung persekutuan luar sebagai berikut.

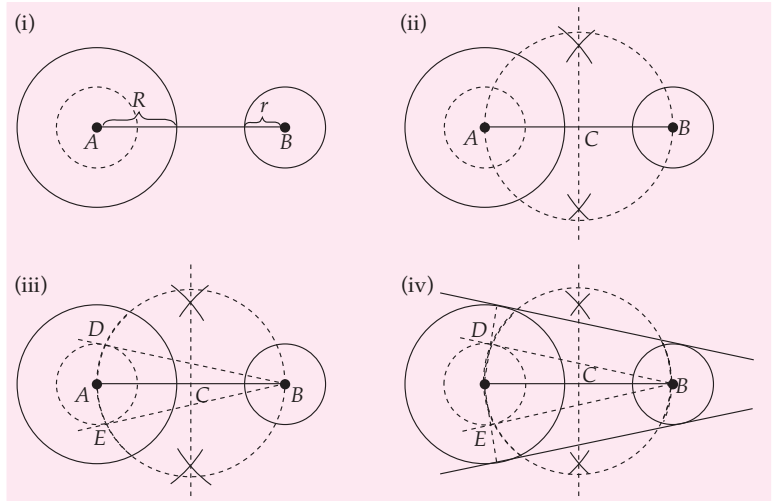
(i) Lukislah lingkaran A dengan jari-jari R dan lingkaran B dengan jari-jari r dengan $R > r$. Di dalam lingkaran A, lukis sebuah lingkaran dengan jari-jari r yang berpusat di A.

(ii) Lukislah dua busur dengan jari-jari lebih besar $\frac{1}{2}AB$ yang dilukis dari pusat lingkaran di titik A dan di titik B. Tarik garis lurus dari potongan dua busur sehingga memotong AB tegak lurus di C. Lukis lingkaran dengan jari-jari AC dan pusat C.

(iii) Tariklah garis dari B ke D dan E.

(iv) Lukislah 2 garis yang menyinggung kedua lingkaran yang sejajar dengan BD dan BE.

Sumber: Buku Saku Penemuan, Erlangga

Gambar 7.8 Rantai sepeda yang membentuk garis singgung persekutuan luar dari kedua lingkaran gir sepeda.

Gambar 7.9 Melukis garis singgung persekutuan luar

2) Panjang Garis Singgung Persekutuan Luar

Pada Gambar 7.10, garis k menyinggung lingkaran di A dan B. Tarik garis sejajar AB dari N ke garis AM dan memotong di titik C sehingga terbentuk ΔCMN.

Jarak antara dua titik singgung diperoleh dengan menggunakan dalil Pythagoras sebagai berikut.

Perhatikan ΔCMN pada Gambar 7.10.

$$CM = AM - AC, \text{ dan}$$
$$(MN)^2 = (CM)^2 + (CN)^2, \text{ maka}$$
$$(CN)^2 = (MN)^2 - (CM)^2$$
$$CN = \sqrt{(MN)^2 - (AM - AC)^2}$$

Gambar 7.10 Panjang garis singgung persekutuan luar

Jika jarak antara kedua pusat lingkaran d, jari-jari lingkaran M adalah R dan jari-jari lingkaran N adalah r, maka:

$$j = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}, \text{ dengan } R > r$$

dengan j = panjang garis singgung persekutuan luar.

Agar kalian memahami cara penggunaan rumus di atas, pelajari contoh soal berikut.

Contoh SOAL

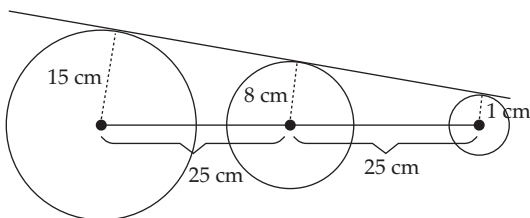
Jarak garis singgung persekutuan luar adalah 24 cm dan jarak dua pusat lingkaran adalah 25 cm. Jika salah satu jari-jari lingkaran adalah 8 cm, tentukan jari-jari lingkaran yang lain.

Penyelesaian:

Misalkan, d = 25 cm, j = 24 cm dan r = 8 cm,

$$j^2 = d^2 - (R - r)^2$$
$$24^2 = 25^2 - (R - 8)^2$$

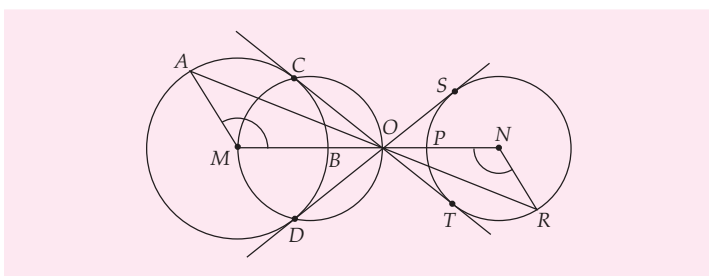
$$(R - 8)^2 = 25^2 - 24^2$$
$$= 625 - 576$$
$$(R - 8)^2 = 49$$
$$R - 8 = \pm 7$$
$$R_1 = 8 + 7 = 15 \text{ cm dan}$$
$$R_2 = 8 - 7 = 1 \text{ cm}$$

Jadi, jari-jari lingkaran yang lain adalah 15 cm dan 1 cm.

c. Garis Singgung Persekutuan Dalam Lingkaran

1) Cara Melukis Garis Singgung Persekutuan Dalam Lingkaran

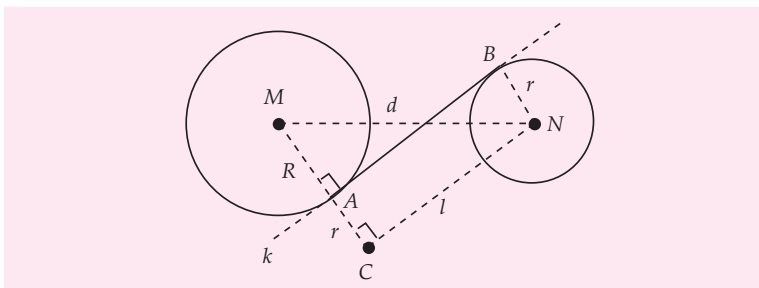
Berikutnya kita akan mempelajari cara melukis garis singgung persekutuan dalam. Untuk lebih jelas coba perhatikan penjelasan di bawah ini.

Untuk melukis garis singgung persekutuan dalam *O* dapat digunakan cara sebagai berikut (Gambar 7.11).

a) Buat dua buah lingkaran dengan pusat *M* dan *N*.
b) Buat sudut *AMB* dan sudut *PNR* = 120° (pakai busur atau jangka).
c) Tariklah garis dari *A* ke *R*.
d) Garis *AR* memotong *MN* di *O*, *O* adalah pusat dilatasi.
e) Buatlah garis singgung dari lingkaran *M*, yaitu *OC* dan *OD*.
f) Perpanjanglah kedua garis singgung itu hingga menyinggung lingkaran *N* di titik *S* dan *T*.
g) *DS* dan *CT* adalah garis singgung persekutuan dalam lingkaran.

Gambar 7.11 Melukis garis singgung persekutuan dalam lingkaran

Untuk membuktikan bahwa cara melukis garis singgung persekutuan dalam yang telah kalian simak tadi benar atau tidak? Sekarang, *coba kalian lakukan kembali cara melukis tersebut pada buku kalian masing-masing. Buktikanlah apakah benar, garis singgung persekutuan dalam yang didapatkan adalah sebuah garis singgung lingkaran.*

2) Panjang Garis Singgung Persekutuan Dalam Lingkaran

Setelah kalian mengerti cara melukis garis singgung persekutuan dalam lingkaran, kini agar kalian mudah menghitung panjang garis singgung persekutuan dalam, marilah kita perhatikan penjelasan gambar 7.12 berikut.

Gambar 7.12 Panjang garis singgung persekutuan dalam

Pada Gambar 7.12, garis k menyinggung lingkaran M di titik A dan lingkaran N di titik B sehingga AB adalah garis singgung lingkaran serta MN adalah jarak pusat kedua lingkaran.

Pada ΔCMN berlaku dalil Pythagoras.

$$MN^2 = MC^2 + CN^2$$

$$(CN)^2 = (MN)^2 - (MC)^2$$

Karena $MC = MA + AC$, maka

$$(CN)^2 = (MN)^2 - (MA + AC)^2.$$

Jika jarak kedua pusat lingkaran d, jari-jari lingkaran M adalah R dan jari-jari lingkaran N adalah r, maka

$$l = \sqrt{d^2 - (R + r)^2}\text{, dengan } R > r$$

dengan l = panjang garis singgung persekutuan dalam.

Untuk lebih memahami penggunaan rumus di atas pelajari contoh soal berikut.

Contoh SOAL

Jarak dua pusat lingkaran adalah 15 cm. Jika jari-jari salah satu lingkaran 7 cm, tentukan jari-jari yang lain jika panjang garis singgung persekutuan dalam 12 cm.

Penyelesaian:

Misalkan: d = 15 cm (jarak 2 pusat), R = 7cm,

$$l^2 = d^2 - (R + r)^2$$

$$\Leftrightarrow (R + r)^2 = d^2 - l^2$$

$$\Leftrightarrow (7 + r)^2 = 15^2 - 12^2$$

$$\Leftrightarrow (7 + r)^2 = 225 - 144 = 81$$

$$\Leftrightarrow 7 + r = \pm 9$$

$$\Leftrightarrow r_1 = 9 - 7 = 2,\ r_2 = -9 - 7 = -16$$

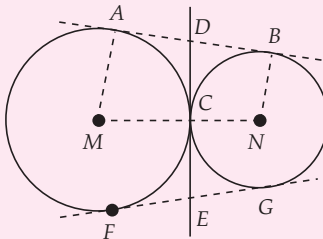
(tidak memenuhi, karena $r < 0$)

Jadi, jari-jari lingkaran yang dimaksud adalah 2 cm.

LATIHAN 2

1. Diketahui dua buah lingkaran yang berpusat di M dan N. Sebuah garis menyinggung kedua lingkaran di A dan B dengan panjang 24cm. Jika jarak kedua pusat lingkaran = 25 cm dan jari-jari lingkaran N = 5 cm, hitung jari-jari lingkaran M.
2. Jari-jari lingkaran M adalah 8 cm dan jari-jari lingkaran N adalah 4 cm. Jika panjang garis singgung persekutuan dalam lingkaran 16 cm, hitunglah jarak kedua pusat lingkaran.

Tugas Siswa

AB dan FG adalah garis singgung persekutuan luar lingkaran. Lingkaran M dan N bersinggungan di C dan dari C dibuat garis lurus hingga memotong AB dan FG di D dan E. Jika AM = 18 cm, BN = 8 cm, dan AB = 24 cm, hitunglah DE dan luas $AMNB$.

3 Panjang Sabuk Lilitan

Dari subbab sebelumnya kalian tentunya telah memahami konsep menghitung panjang garis singgung persekutuan dari dua lingkaran. Selanjutnya dengan menggunakan konsep tersebut, kita dapat menentukan panjang sabuk lilitan minimal yang menghubungkan dua lingkaran. Untuk lebih jelas pelajarilah penjelasan berikut.

Pada Gambar 7.13, dua buah lingkaran yang bersinggungan dengan garis singgung persekutuan luar AB dan DC. Panjang garis singgung persekutuan luar AB dan DC adalah sama dengan jarak antara kedua pusat lingkaran M dan N. Mengapa demikian? Karena kedua lingkaran M dan N mempunyai jari-jari yang sama, yaitu r maka panjang MN adalah $2r$, sedangkan panjang AB atau DC didapat dengan menggunakan rumus panjang garis singgung persekutuan luar, yaitu:

Gambar 7.13 Sabuk lilitan minimal lingkaran M dan N

$$AB = \sqrt{MN^2 - (R - r)}$$

$$AB = \sqrt{(2r)^2 - 0} \quad \text{(karena jari-jari } M \text{ dan } N \text{ sama maka } R - r = 0\text{)}$$

$$AB = \sqrt{4r^2} = 2r$$

Jika kedua lingkaran itu adalah pipa dengan jari-jari r dan pipa tersebut akan diikat oleh tali, maka panjang tali

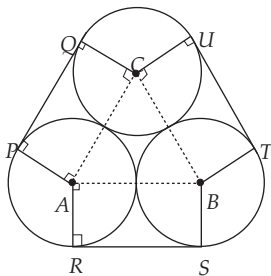
minimal adalah $AB + CD + 2 \times$ keliling $\frac{1}{2}$ lingkaran atau sama dengan 2 kali panjang garis singgung persekutuan luar + keliling lingkaran. Dari keterangan di atas dapat disimpulkan bahwa panjang sabuk yang dibutuhkan untuk mengikat dua lingkaran yang berjari-jari sama adalah 2 kali panjang garis singgung persekutuan luar + keliling lingkaran. Jadi, dapat disimpulkan bahwa untuk $r = a$ maka

Panjang sabuk lilitan minimal $= 2 \times 2a + 2\pi a = 2a\ (2 + \pi)$

dengan a = jari-jari lingkaran 1 (R) atau jari-jari lingkaran 2 (r), dengan $R = r$.

Selanjutnya coba kalian tentukan rumus menghitung panjang lilitan minimal dari beberapa lingkaran, misalnya 3, 6, 9 buah lingkaran dan seterusnya. Dengan ketentuan tiap lingkaran memiliki jari-jari yang sama dan jarak antara dua pusat lingkarannya = 2 × jari-jari lingkaran.

Contoh SOAL

Hitunglah panjang tali yang dibutuhkan untuk mengikat ketiga pipa berikut jika jari-jari 7 cm.

Penyelesaian:

Pada gambar di atas ΔABC adalah Δ sama sisi.

$\angle BAC = 60°$; $\angle PAC = 90°$; $\angle RAB = 90°$

$\angle PAR = 360° - (60° + 90° + 90°) = 120$

$\angle PAR = \angle SBT = \angle UCQ = 120°$

$\angle PAR + \angle SBT + \angle UCQ = 120° + 120° + 120°$
$= 360°$

Panjang tali yang dibutuhkan:

$= 3 \times 2a$ + keliling lingkaran

$= 6a + 2\pi a$

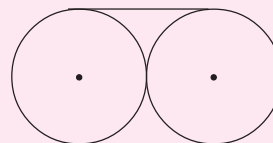
$= 6 \times 7 \text{ cm} + 2 \times \frac{22}{7} \times 7$

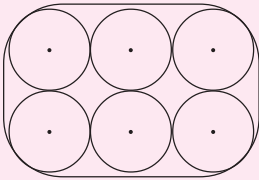
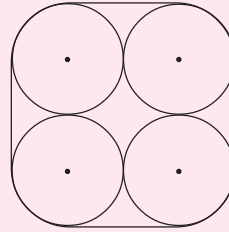
$= 42 \text{ cm} + 44 \text{ cm}$

$= 86 \text{ cm}$

Jadi, panjang tali yang diperlukan untuk mengikat ketiga pipa tersebut adalah 86 cm.

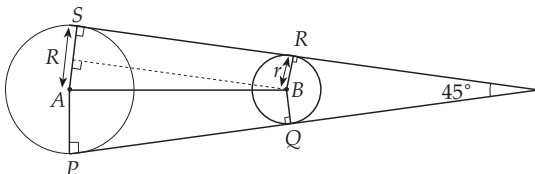
LATIHAN 3

1. Diketahui dua buah lingkaran memiliki panjang jari-jari sama, yaitu 8 cm dan jarak kedua pusat lingkaran 16 cm. Hitunglah:
   a. panjang garis singgung persekutuan luar;
   b. panjang sabuk lilitan minimal.
2. Gambar berikut adalah penampang 2 buah batang pohon dengan diamater 42 cm.

Hitunglah:
   a. panjang tali minimal untuk mengikat 2 buah batang pohon itu;
   b. perubahan panjang tali, jika jarak antara kedua pusat penampang batang pohon itu direnggangkan 20 cm.

3. Hitunglah panjang sabuk lilitan minimal dari gambar penampang 6 buah drum air di bawah ini. Diketahui jari-jari dari penampang drum yang berbentuk lingkaran adalah 16 cm.

4. Berapakah panjang tali minimal untuk mengikat 4 buah pipa air yang disusun seperti di bawah ini? Diketahui diameter tiap pipa adalah 28 cm.

C Aplikasi Garis Singgung dalam Kehidupan

Dalam kehidupan kalian tentu sering menghadapi persoalan yang berhubungan dengan garis singgung lingkaran. Untuk lebih jelas mengenai aplikasi garis singgung lingkaran perhatikan contoh berikut ini.

Contoh SOAL

Dua buah sepeda dihubungkan dengan sebuah rantai. Jari-jari kedua gir masing-masing 20 cm dan 15 cm. Jarak kedua pusat lingkaran gir sepeda itu 25 cm. Jika rantai gir tersebut diperpanjang maka kedua rantai gir itu akan membentuk sudut sebesar 45°. Tentukanlah panjang rantai minimal yang menghubungkan kedua roda tersebut.

Penyelesaian:

$AB = 25$ cm, $R = 20$ cm dan $r = 15$ cm

Besar sudut kecil $QBR = 180° - 45° = 135°$, sedangkan

Besar sudut besar $PAS = 360° - 135° = 225°$

Maka panjang rantai minimal roda = 2 PQ + Busur besar PS + Busur kecil RQ dengan

$$PQ = \sqrt{AB^2 - (R - r)^2} = \sqrt{25^2 - 5^2}$$
$$= \sqrt{5^2 \times (5^2 - 1^2)}$$
$$= 5\sqrt{24}$$
$$= 5\sqrt{4 \times 6}$$
$$= 5\sqrt{4}\ \sqrt{6}$$
$$= 10\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$\text{Busur } PS = \frac{225°}{360°} \times 2\pi R$$
$$= \frac{225°}{360°} \times 2 \times 3{,}14 \times 20$$
$$= 78{,}5 \text{ cm}$$

$$\text{Busur } RQ = \frac{135°}{360°} \times 2\pi\ r$$
$$= \frac{135°}{360°} \times 2 \times 3{,}14 \times 15$$
$$= 35.325 \text{ cm}$$

Jadi, panjang rantai minimal

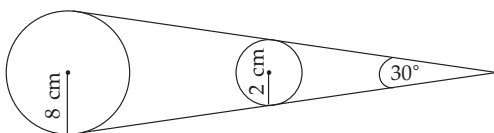
= 2 PQ + Busur besar PS + Busur kecil RQ

$= 2 \times 10\sqrt{6} + 78{,}5 + 35{,}325$

$= 20\sqrt{6} + 113{,}835$

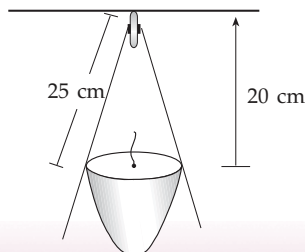
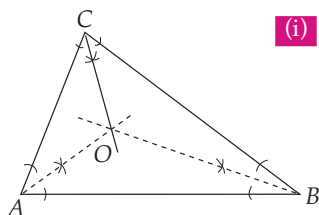
$= 162{,}8$ cm

Soal-Soal Kontekstual

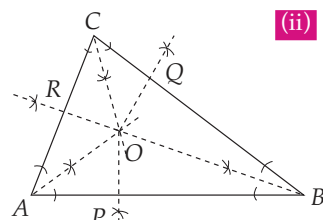
1. Dua buah roda yang memiliki diameter 8 cm dan 2 cm dililitkan dengan sebuah tali. Sudut yang dibentuk dari perpanjangan tali itu adalah 30°. Jika jarak kedua titik pusat roda 32 cm, berapakah panjang tali minimal yang menghubungkan kedua roda tersebut?

2. Sebuah pipa air berdiameter 1 m, tersebut pecah di bagian tengahnya. Pipa itu akan diganti dengan pipa kecil berdiameter 20 cm. Berapa banyak pipa kecil yang mungkin untuk mengganti pipa yang pecah tadi, agar air yang mengalir sama banyak dengan air yang mengalir pada pipa yang pecah tadi.

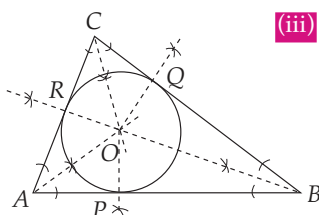
3. Sebuah lampu hias digantung pada langit-langit rumah. Jarak langit-langit ke lampu hias 20 cm dan panjang tali lampu hias 25 cm. Hitunglah diameter lampu hias itu.

D Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar Segitiga

Gambar 7.14 Melukis lingkaran dalam suatu segitiga

Kalian sudah mempelajari cara melukis garis singgung lingkaran dan menghitung panjang garis singgung tersebut. Sekarang, akan kita lanjutkan pembahasan mengenai lingkaran, yaitu melukis lingkaran dalam dan lingkaran luar segitiga.

1 Cara Melukis Lingkaran Dalam Suatu Segitiga

Lingkaran di dalam segitiga adalah lingkaran yang dibuat di dalam segitiga dan menyinggung sisi-sisi segitiga. Untuk mengetahui cara melukis lingkaran dalam segitiga, perhatikan langkah-langkah berikut.

(i) Lukislah garis bagi $\angle A$, $\angle B$, dan $\angle C$ dan berpotongan di O sebagai pusat lingkaran.

(ii) Lukislah garis-garis bagi yang ditarik dari O dan tegak lurus terhadap sisi-sisi ΔABC di P, Q, dan R. Garis-garis tersebut merupakan jari-jari lingkaran di P, Q, dan R.

(iii) Lukislah lingkaran dengan pusat O dan menyinggung segitiga ABC di P, Q, dan R. Lingkaran yang dilukis itu yang disebut lingkaran dalam segitiga.

Dengan mengamati gambar lingkaran dalam segitiga yang telah kalian buat. *Sekarang, coba kalian definisikan pengertian lingkaran dalam segitiga dengan kata-katamu sendiri.*

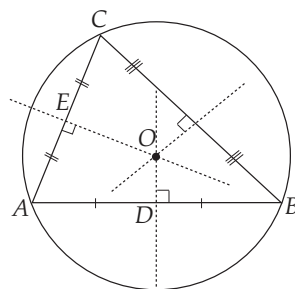
2 Cara Melukis Lingkaran Luar Segitiga

Lingkaran luar segitiga dapat ditulis dengan menentukan pusat lingkaran terlebih dahulu. Pusat lingkaran luar segitiga didapat dari perpotongan garis-garis sumbu suatu segitiga.

Cara melukis lingkaran luar segitiga adalah sebagai berikut.

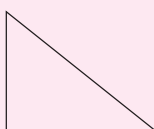
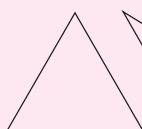
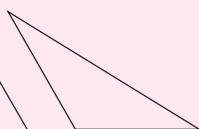
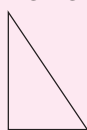
(i) Buatlah garis sumbu dari AB, AC, dan BC dan ketiga garis sumbu ini berpotongan di O. Titik O adalah pusat lingkaran luar ΔABC.

(ii) Lukislah lingkaran dengan pusat di O tadi yang melalui titik-titik sudut segitiga ABC.

Sekarang, *coba kalian definisikan pengertian lingkaran luar segitiga dengan kata-katamu sendiri.*

Gambar 7.15 Lingkaran luar segitiga

LATIHAN 4

1. Lukislah lingkaran dalam dari segitiga-segitiga berikut.

2. Lukislah lingkaran luar dari segitiga-segitiga berikut.

KEGIATAN

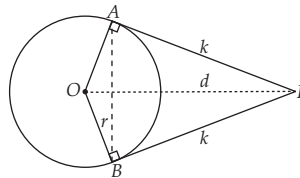
Pinjamlah sebuah sepeda kepada temanmu. Selanjutnya ukurlah jari-jari dari kedua gir sepeda yang kalian pinjam itu. Ukurlah jarak antara kedua titik pusat lingkaran gir sepeda tadi.

a. Hitunglah panjang garis singgung luar dari kedua gir sepeda itu.

b. Hitunglah panjang rantai sepeda minimal yang menghubungkan kedua girnya dengan menggunakan rumus sabuk lilitan.

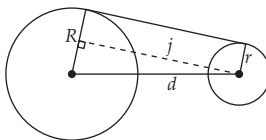
c. Bandingkan panjang rantai sepeda yang telah kalian hitung dengan rumus dan dengan secara langsung menggunakan meteran. Apakah ada perbedaannya? Berapakah besar perbedaan panjangnya? Selanjutnya, apakah yang dapat kalian simpulkan dari perbedaan itu?

Rangkuman

1. Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran hanya di satu titik dan tegak lurus jari-jari lingkaran pada titik singgung lingkaran itu.
2. Sifat garis singgung lingkaran selalu tegak lurus dengan jari-jari yang melalui titik singgung lingkarannya.
3. Melalui sebuah titik pada lingkaran hanya dapat dibuat satu garis singgung.
4. Melalui sebuah titik di luar lingkaran dapat dibuat dua garis singgung.
5. Layang-layang garis singgung

Panjang garis singgung melalui titik di luar lingkaran $k = \sqrt{d^2 - r^2}$, dengan

d = jarak titik di luar lingkaran ke pusat lingkaran

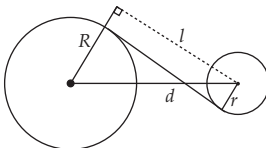
r = jari-jari lingkaran

6.

Panjang garis singgung persekutuan luar

$j = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}$, dengan $R > r$.

d = jarak dua pusat lingkaran

R, r = jari-jari lingkaran ($R > r$)

7.

Panjang garis singgung persekutuan dalam

$l = \sqrt{d^2 - (R + r)^2}$, dengan $R > r$.

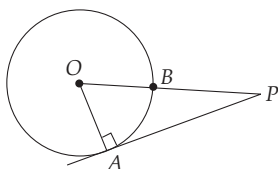
d = jarak dua pusat lingkaran

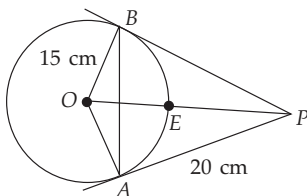
R, r = jari-jari lingkaran ($R > r$)

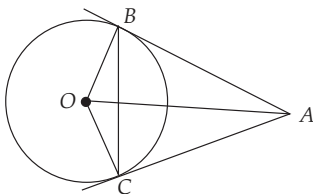
Uji Kompetensi Bab 7

A Pilihan ganda

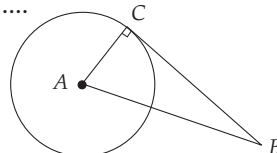
Berilah tanda silang (×) pada huruf a, b, c, atau d pada jawaban yang benar.

1. Sebuah lingkaran dengan pusat di titik O. AP adalah garis singgung dengan panjang 12 cm dan PB = 8 cm. Panjang jari-jari lingkaran adalah....

   a. 4 cm c. 6 cm
   b. 5 cm d. 7 cm

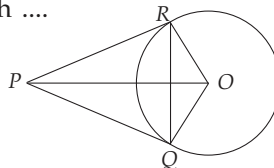
2. Perhatikan gambar di bawah ini. Jika jari-jari lingkaran = 15 cm, PA = 20 cm, maka AB dan PE adalah ....

   a. 12 cm dan 15 cm
   b. 12 cm dan 10 cm
   c. 24 cm dan 10 cm
   d. 15 cm dan 12 cm

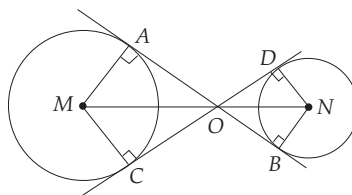
3. Perhatikan gambar di bawah ini. Luas layang-layang $OBAC$ = 525 cm^2. Jika panjang BC = 30 cm dan OB = 21 cm maka panjang BA adalah ....

   a. 28 cm c. 37 cm
   b. 35 cm d. 39 cm

4. Panjang garis, singgung yang digambar dari suatu titik di luar lingkaran adalah 12 cm. Jika panjang jari-jari dari lingkaran 9 cm maka panjang garis yang menghubungkan titik itu dengan titik pusat lingkaran adalah ....
   a. 13 cm c. 16 cm
   b. 12,5 cm d. 15 cm

5. Panjang AB = 12 cm dan BC = 6 cm. Panjang jari-jari lingkaran di bawah ini adalah ....

   a. $5\sqrt{3}$ cm c. 8 cm
   b. $6\sqrt{3}$ cm d. 10 cm

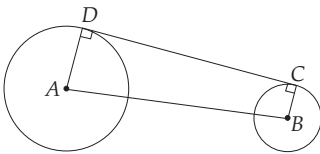
6. Jari-jari suatu lingkaran 16 cm. Jarak suatu titik ke titik pusat lingkaran adalah 34 cm maka panjang garis singgung yang ditarik dari titik tersebut adalah ....
   a. 30 cm c. 29 cm
   b. 25 cm d. 23 cm

7. Pada gambar di bawah ini, panjang jari-jari lingkaran adalah 5 cm dan panjang OP = 13. Luas layang-layang $PQOR$ adalah ....

   a. 40 cm c. 56 cm
   b. 45 cm d. 60 cm

8. Pada gambar di bawah ini, MN = 20 cm, AB = 16 cm, AM = 8 cm. Panjang AO dan MO adalah ... cm.

a. $6\frac{2}{3}$ dan $5\frac{2}{3}$
c. $10\frac{2}{3}$ dan $13\frac{1}{3}$
b. $6\frac{1}{3}$ dan $5\frac{1}{3}$
d. $6\frac{2}{3}$ dan 5

9. Panjang garis singgung persekutuan dalam adalah 21 cm. Kedua titik pusatnya berjarak 29 cm. Jika panjang salah satu jari-jari adalah 8,5 cm maka panjang jari-jari dari lingkaran yang lain adalah ....
   a. 15 cm
   b. 12,5 cm
   c. 13 cm
   d. 11,5 cm

10. Jarak dua pusat lingkaran adalah 15 cm. Jika panjang jari-jari dari masing-masing lingkaran 4 cm dan 5 cm maka panjang garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran itu adalah ....
   a. 15 cm
   b. 13 cm
   c. 12 cm
   d. 11 cm

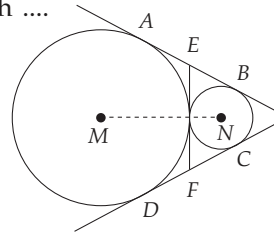
11. Perhatikan gambar di bawah ini. Jari-jari lingkaran A dan B masing-masing adalah 23 cm dan 8 cm. Jika panjang AB adalah 39 cm maka panjang CD adalah ....

   a. 32 cm
   b. 28,5 cm
   c. 36 cm
   d. 35 cm

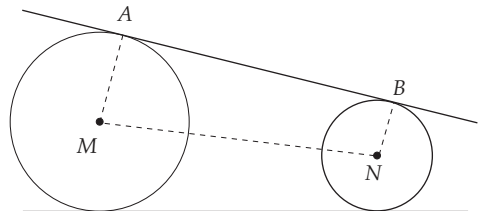
12. Jari-jari dari dua lingkaran masing-masing adalah 16 cm dan 24 cm. Jika garis singgung persekutuan dalam lingkaran 9 cm maka jarak antara kedua pusat lingkaran adalah ....
   a. 41 cm
   b. 42 cm
   c. 45 cm
   d. 47 cm

13. Jari-jari lingkaran dengan pusat A dan B adalah 10 cm dan 4 cm. Jika AB = 10 cm maka panjang garis singgung persekutuan luar adalah ....
   a. 8 cm
   b. 12 cm
   c. 15 cm
   d. 16 cm

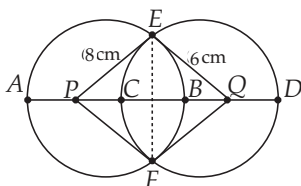
14. Panjang garis singgung persekutuan luar dari dua buah lingkaran adalah 25 cm. Jika panjang jari-jari dari kedua lingkaran masing-masing adalah 15 cm dan 8 cm maka jarak antara kedua titik pusat adalah ....
   a. 21 cm
   b. 23 cm
   c. 24 cm
   d. 26 cm

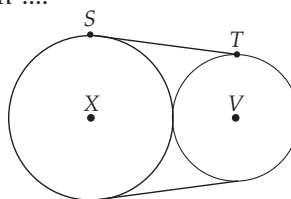
15. Jika jarak antara dua titik pusat lingkaran adalah 17 cm dan jari-jari kedua lingkaran adalah 17 cm dan 9 cm maka panjang garis singgung persekutuan luarnya adalah ....
   a. 15 cm
   b. 18 cm
   c. 20 cm
   d. 21 cm

16. Pada gambar di bawah ini, jari-jari lingkaran M = 20 cm, jari-jari lingkaran N = 5 cm dan MN = 25 cm. Panjang EF adalah ....

   a. 10 cm
   b. 15 cm
   d. 25 cm
   c. 20 cm

17. Perhatikan gambar di bawah ini. Jari-jari lingkaran M adalah 18 cm dan jarak kedua pusat lingkaran 25 cm. Jika panjang garis singgung 24 cm maka jari-jari lingkaran N adalah ....

   a. 7 cm
   b. 8 cm
   c. 11 cm
   d. 12 cm

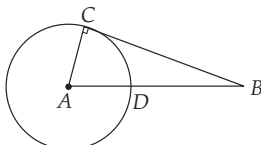
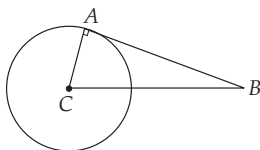
18. Panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran adalah 12 cm. Jarak kedua titik pusatnya adalah 13 cm. Jika panjang jari-jari salah satu lingkaran adalah 3,5 cm maka panjang jari-jari lingkaran yang lain adalah ....
   a. 1,5 cm
   b. 5 cm
   c. 8,5 cm
   d. 10 cm

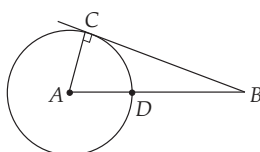
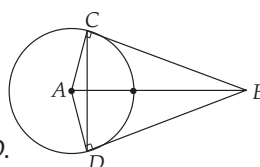
19. Pada gambar di bawah ini panjang PE = 8 cm dan EQ = 6 cm. Panjang BC dan EF berturut-turut adalah ....

a. 4 cm dan 8,4 cm
b. 5 cm dan 9,6 cm
c. 4 cm dan 9,6 cm
d. 4 cm dan 8,4 cm

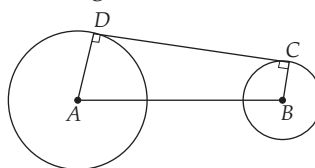
20. Perhatikan gambar dibawah ini. Jika jari-jari lingkaran X dan V masing-masing 9 cm dan 3 cm maka panjang ST adalah ....

a. $3\sqrt{3}$ cm
b. $5\sqrt{2}$ cm
c. $4\sqrt{3}$ cm
d. $4\sqrt{5}$ cm

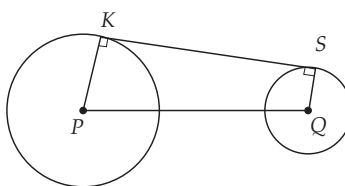
B Esai

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini.

1. Perhatikan gambar di bawah. Panjang BC = 24 cm dan panjang BD = 8 cm. Hitunglah panjang jari-jari lingkaran.

2. Perhatikan gambar berikut. Panjang AB = 20 cm dan BC = 25 cm. Hitunglah luas dan keliling lingkaran itu.

3. Dari titik K di luar lingkaran dibuat garis singgung lingkaran dengan titik singgung A dan B. Pusat lingkaran M, dengan jari-jari lingkaran 5 cm dan jarak KM = 13 cm. Hitunglah panjang KA, KB, dan AB.

4. Perhatikan gambar berikut. AB = 25 cm dan BD = 18 cm. Hitunglah panjang AC dan panjang BC.

5. Perhatikan gambar berikut. Jari-jari = 24 cm dan AB = 40 cm. Hitunglah keliling dan luas layang-layang $ACBD$.

6. Dua buah lingkaran sama besar berjari-jari 20 cm. Jarak kedua pusat lingkaran 40 cm. Hitunglah panjang garis singgung persekutuan luar dari kedua lingkaran tersebut.

7. Perhatikan gambar berikut.

Panjang AD = 28 cm, BC = 15 cm dan AB = 25 cm. Hitunglah panjang CD.

8. Pada gambar berikut, panjang PQ = 41 cm, PR = 29 cm, dan QS = 20 cm. Hitunglah panjang RS.

9. Panjang garis singgung persekutuan luar dua buah lingkaran sama dengan 16 cm. Jari-jari kedua buah lingkaran 28 cm dan 16 cm. Hitunglah jarak kedua pusat lingkaran.

10. Dua buah lingkaran berjari-jari 28 cm dan 8 cm. Kedua titik pusatnya 52 cm. Hitunglah panjang garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran tersebut.

BAB 8

Kubus dan Balok

Sumber: www.algarveholidayhomes.net

Tujuan Pembelajaran

- Mengenal bagian-bagian kubus dan balok
- Menemukan jaring-jaring kubus dan balok
- Menemukan rumus luas permukaan dan volume kubus dan balok serta dapat menggunakannya dalam pemecahan masalah.

Di kelas VII kalian telah mempelajari konsep bangun datar, di antaranya persegi dan persegi panjang. Konsep persegi dan persegi panjang yang telah kalian pelajari akan berguna pada pembahasan kali ini, yaitu mengenai kubus dan balok. Ketika mempelajari kubus kita akan berhubungan dengan persegi sedangkan pada balok akan berhubungan dengan persegi panjang.

Penerapan konsep kubus dan balok pada kehidupan sehari-hari seperti tampak pada gambar di atas.

Tahukah kalian nama tempat pada gambar di atas? Digunakan untuk apa tempat itu? Adakah tempat itu di rumah kalian? Jika ada, dapatkah kalian mengukur volume air yang dapat ditampung oleh tempat itu?

Setelah kalian mempelajari bab ini, kalian tentu akan dapat melakukan hal tersebut. Kalian hanya cukup mengukur panjang, lebar, dan tingginya. Kemudian memasukkan ke dalam rumus volumenya.

Tidak hanya itu, kalian akan lebih banyak menjumpai hal-hal menarik lagi.

Uji Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari materi bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Sebuah persegi panjang memiliki panjang 10 cm dan lebar 8 cm. Tentukan keliling dan luas persegi panjang itu.
2. Keliling suatu persegi 24 cm. Tentukan panjang sisi dan luas persegi itu.
3. Panjang diagonal-diagonal suatu persegi panjang adalah $(2x + 10)$ cm dan $(x + 40)$ cm. Tentukan panjang diagonal persegi panjang itu.
4. Suatu persegi panjang memiliki panjang diagonal 15 cm dan lebar 9 cm. Tentukan keliling dan luas persegi panjang.

A Bagian-Bagian Kubus dan Balok

Di sekolah dasar kalian telah mempelajari kubus dan balok. Masih ingatkah kalian bentuk kubus dan balok? Apa saja bagian-bagian kubus dan balok? Pada pembahasan kali ini akan dipelajari bagian-bagian kubus dan balok lebih mendalam. Untuk mengetahui lebih lanjut perhatikan pembahasan berikut.

1 Bagian-Bagian Kubus

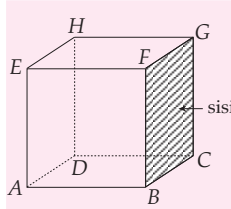
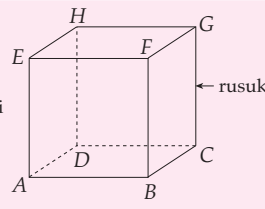
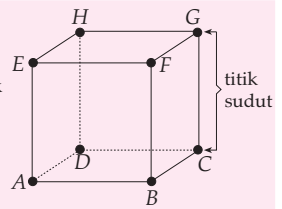
a. Sisi, Rusuk, dan Titik Sudut

Masih ingatkah kalian pengertian sisi pada bangun datar, misalnya segitiga? Apakah bentuk sisi dari segitiga? Pengertian sisi pada bangun datar hampir sama dengan sisi pada bangun ruang, yang membedakan hanya bentuknya. Bentuk sisi pada bangun datar berupa garis, sedangkan pada bangun ruang berupa bidang/bangun datar.

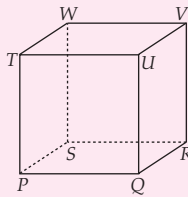
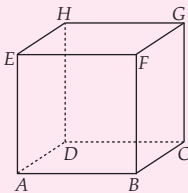
Perhatikan daerah yang diarsir pada Gambar 8.1, yaitu *BCGF*. Bidang *BCGF* merupakan salah satu sisi dari kubus *ABCD.EFGH*. Tahukah kalian apa bentuk sebenarnya dari *BCGF?* Dapatkah kalian menyebutkan sisi yang lain? Berapakah banyak sisi kubus semuanya? Marilah sekarang kita perhatikan bagian kubus yang lain (Gambar 8.2), yaitu garis *CG*. Garis *CG* merupakan tempat pertemuan/perpotongan sisi *BCGF* dan *CDHG*. Garis yang demikian disebut *rusuk*. Jadi, garis *CG* merupakan rusuk kubus *ABCD.EFGH. Dapatkah kalian menyebutkan rusuk lain yang sejajar dengan CG? Cobalah kalian sebutkan pasangan rusuk sejajar yang lain. Berapa banyak rusuk kubus semuanya yang kalian temukan?*

Cobalah kalian perhatikan salah satu bagian kubus yang lain lagi (Gambar 8.3), misalnya titik *B*. Titik *B* merupakan tempat pertemuan rusuk *AB*, *BC*, dan *BF*. Titik *B* disebut titik sudut kubus *ABCD.EFGH. Cobalah kalian sebutkan titik sudut yang lain. Berapa banyak titik sudut pada kubus?*

Math Quiz

1. Cobalah kalian simpulkan pengertian sisi, rusuk, dan titik sudut pada bangun ruang.
2. Apakah sisi-sisi pada kubus kongruen? Bandingkanlah jawabanmu dengan jawaban temanmu?

Gambar 8.1 Sisi kubus

Gambar 8.2 Rusuk kubus

Gambar 8.3 Titik sudut kubus

LATIHAN 1

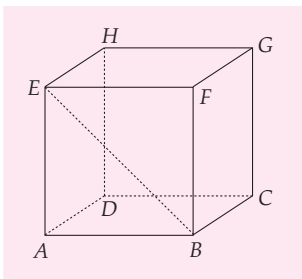
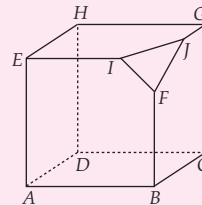
1. Perhatikanlah kubus *PQRS.TUVW*. Sebutkan rusuk, titik sudut, dan sisi dari kubus tersebut.

2. Perhatikanlah kubus *ABCD.EFGH*.
   a. Tentukanlah rusuk-rusuk yang sejajar dengan *AB*, *AE*, dan *AD*.

   b. Perhatikanlah kubus *ABCD.EFGH*. Tentukanlah rusuk-rusuk yang bersilangan dengan *AB*, *AE*, dan *AD*.

   c. Perhatikanlah kubus *ABCD.EFGH*. Tentukanlah sisi-sisi yang sejajar dengan
      (i) *ABCD*; (iii) *ABFE*.
      (ii) *ADHE*;

3. Perhatikanlah gambar di bawah ini. Tentukanlah banyaknya titik sudut, rusuk, dan sisi.

b. Diagonal Sisi Kubus

Pada bagian sebelumnya kalian telah mempelajari sisi kubus. Sekarang kita akan membahas bagian pada sisi kubus.

Marilah sekarang kita perhatikan garis *BE* yang terdapat pada sisi *ABFE*. Garis *BE* menghubungkan titik sudut *B* dan *E*. Garis *BE* dinamakan *diagonal sisi kubus ABCD.EFGH*.

Gambar 8.4 Diagonal sisi kubus

Agar kalian lebih memahami mengenai diagonal sisi kubus, lengkapilah Tabel 8.1 di bawah ini. Salinlah dahulu tabel berikut pada buku catatanmu.

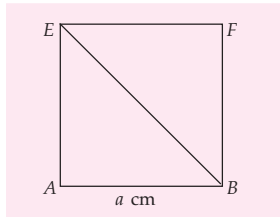
Tabel 8.1 Sisi dan Diagonal Sisi Kubus *ABCD.EFGH*

Nama Sisi Kubus	Nama Diagonal Sisi
ABCD	....
ABFE	....
BCGF	....
....	....
....	....
....	....

Berapakah banyaknya diagonal sisi kubus? Apa yang dapat kalian simpulkan mengenai pengertian diagonal sisi kubus?

Marilah kita cari panjang diagonal sisi kubus.

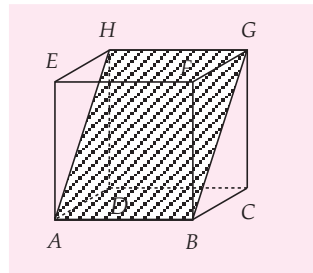
Telah kita ketahui dari bagian sebelumnya bahwa sisi kubus berbentuk persegi. Jadi, *ABFE* berbentuk persegi. Kita misalkan panjang $AB = a$ cm. Dengan menggunakan dalil Pythagoras akan kita peroleh

$$\begin{aligned} BE^2 &= AB^2 + AE^2 \\ &= a^2 + a^2 \\ &= 2a^2 \\ BE &= \sqrt{2a^2} \\ &= a\sqrt{2} \end{aligned}$$

Gambar 8.5 Panjang diagonal sisi kubus

Untuk Diingat

Jika panjang rusuk suatu kubus adalah a cm maka panjang diagonal sisi kubus tersebut adalah $a\sqrt{2}$ cm.

c. Bidang Diagonal Kubus

Perhatikanlah daerah yang diarsir pada kubus Gambar 8.6, yaitu bidang *ABGH.* Bidang *ABGH* dibatasi oleh dua rusuk kubus (*AB* dan *GH*) dan dua diagonal sisi kubus (*AH* dan *BG*). Bidang yang demikian dinamakan *bidang diagonal kubus.*

Gambar 8.6 Bidang diagonal kubus

Coba kalian sebutkan dan gambarkan bidang diagonal kubus ABCD.EFGH yang lain. Berapa banyak bidang diagonal kubus yang kalian peroleh?

Dari Gambar 8.6 kita peroleh bahwa:

AB = rusuk kubus

BG = diagonal sisi kubus

Jadi, *ABGH* berbentuk persegi panjang.

Kita misalkan panjang $AB = a$ cm, maka $BG = a\sqrt{2}$ cm sehingga kita peroleh

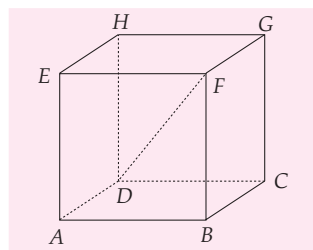
$$\begin{aligned} L_{\square ABGH} &= AB \times BG \\ &= a \times a\sqrt{2} \\ &= a^2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Jadi, luas *ABGH* adalah $a^2\sqrt{2}$ cm^2.

Gambar 8.7 Luas bidang diagonal kubus

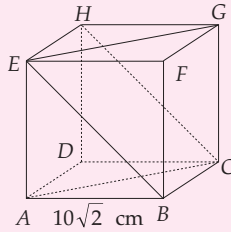
d. Diagonal Ruang Kubus

Coba kalian perhatikan garis *DF* pada Gambar 8.8. Garis *DF* berada di dalam ruang kubus *ABCD.EFGH.* Garis yang demikian dinamakan *diagonal ruang kubus.* Jadi, garis *DF* merupakan diagonal ruang kubus *ABCD.EFGH.*

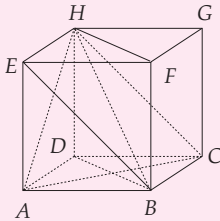
Coba kalian sebutkan dan gambarkan diagonal ruang kubus *ABCD.EFGH* yang lain. *Berapa banyak diagonal ruang yang kalian temukan?*

Gambar 8.8 Diagonal ruang kubus

LATIHAN 2

1. Perhatikanlah gambar kubus *ABCD.EFGH* di samping.

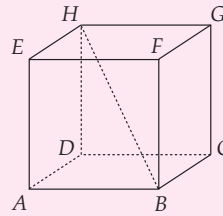
   Jika dibuat bidang diagonal *ACGE* dan bidang diagonal *BCHE* maka tentukanlah:

   a. luas kedua bidang diagonal tersebut dan sebutkan garis yang menjadi perpotongan antara dua bidang diagonal tersebut;

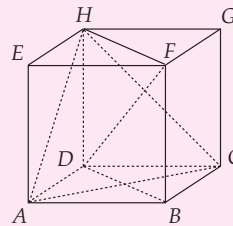
   b. panjang garis potong kedua bidang diagonal tersebut.

2. Perhatikanlah gambar kubus di bawah ini. Pada kubus *ABCD.EFGH* dibuat segitiga *ACH*, bidang diagonal *BDHF* dan *BCHE*. Tentukanlah:

   a. panjang garis potong antara bidang diagonal *BDHF* dan *BCHE*;

   b. panjang garis potong bidang diagonal *BDHF* dan ΔACH;

   c. luas ΔACH.

3. Perhatikanlah gambar di bawah ini.

   Pada kubus *ABCD.EFGH,* garis *HB* merupakan garis potong antara dua bidang diagonal. Sebutkanlah kedua bidang diagonal tersebut.

4. Perhatikan gambar kubus di bawah ini.

   Garis *DF* merupakan diagonal ruang kubus *ABCD.EFGH* dan merupakan garis potong antara dua bidang diagonal.

   a. Sebutkanlah kedua bidang diagonal tersebut.

   b. Jika panjang sisi ΔACH adalah $17\sqrt{2}$ cm, berapa panjang garis *DF*?

2 Bagian-Bagian Balok

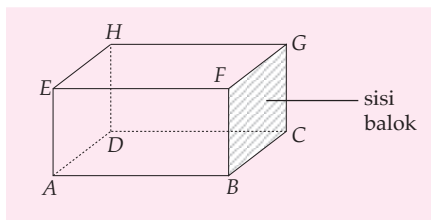
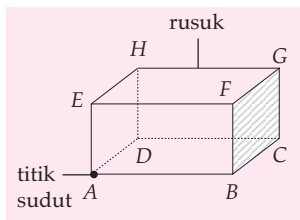
Ketika masih di sekolah dasar kalian tentu sudah belajar tentang balok. Masih ingatkah kalian bagian-bagian balok? Untuk mengingatnya kembali perhatikanlah pembahasan berikut ini.

a. Sisi, Rusuk, dan Titik Sudut

Pengertian sisi pada balok hampir sama dengan sisi pada kubus, yang membedakan hanyalah bentuknya.

Cobalah kalian perhatikan daerah yang diarsir dari balok *ABCD.EFGH* pada Gambar 8.9, yaitu bidang *BCGF.* Bidang ini merupakan salah satu sisi balok.

Math Quiz

1. Apakah semua sisi balok kongruen? Jika tidak, sebutkan pasangan sisi yang kongruen.
2. Apakah semua sisi balok pasti berbentuk persegi panjang? Berikan alasanmu.

Gambar 8.9 Sisi balok

Gambar 8.10 Rusuk dan titik sudut balok

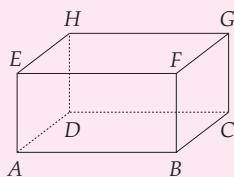
Dapatkah kalian menyebutkan sisi yang lain? Berapa banyak sisi balok semuanya?

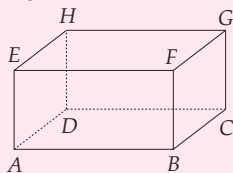
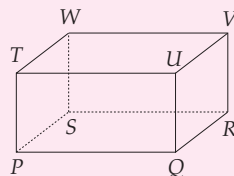
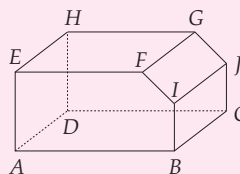
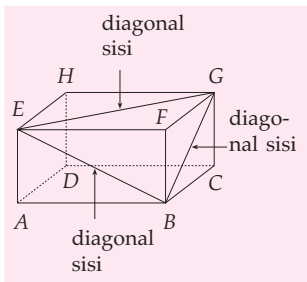
Perhatikanlah garis *GH* pada Gambar 8.10. Garis *GH* merupakan salah satu rusuk balok *ABCD.EFGH*. Pada balok tersebut terdapat tiga pasang rusuk yang sejajar, yaitu:

1. *AB // CD // GH // EF*
2. *AD // BC // FG // EH*
3. *AE // BF // CG // DH*

Sekarang cobalah kalian perhatikan titik sudut balok *ABCD.EFGH* pada Gambar 8.10. *Coba kalian sebutkan semua titik sudut balok ABCD.EFGH. Berapa banyak titik sudut balok semuanya?*

LATIHAN 3

1. Pada balok *ABCD.EFGH* di bawah ini, tentukanlah

   a. 3 rusuk yang sama panjang dengan *AB;*
   b. 3 rusuk yang sama panjang dengan *AD;*
   c. 3 rusuk yang sama panjang dengan *AE.*

2 Perhatikanlah balok *ABCD.EFGH* di bawah ini. Tentukanlah rusuk-rusuk yang bersilangan dengan
   a. *AB;*
   b. *AD;*
   c. *AE.*

3. Perhatikanlah balok *PQRS.TUVW* di bawah ini. Tentukanlah sisi yang sejajar dengan
   a. *PQUT;*
   b. *QRVU;*
   c. *PSWT.*

4. Perhatikanlah gambar di bawah ini.

   Tentukanlah jumlah:
   a. titik sudut;
   b. rusuk;
   c. sisi.

Gambar 8.11 Diagonal sisi balok

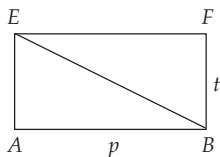
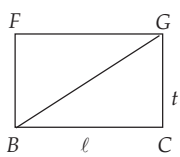
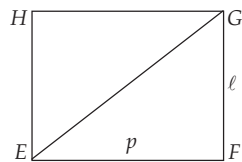
b. Diagonal Sisi Balok

Seperti halnya pada kubus, balok pun mempunyai diagonal sisi. Namun panjang diagonal sisi balok tidak semuanya sama. Perhatikanlah Gambar 8.11. Garis *BE*, *BG*, dan *EG* merupakan diagonal sisi balok *ABCD.EFGH*. *Cobalah kalian sebutkan diagonal sisi yang sama panjang dengan BE. Begitu juga untuk BG dan EG.*

Sekarang, marilah kita cari panjang diagonal sisi-sisi balok tersebut.

Kita misalkan panjang balok $(AB) = p$, lebar balok $(BC) = l$, dan tinggi balok $(BF) = t$.

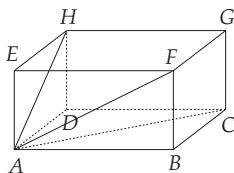
Gambar 2.12 Diagonal sisi balok

Dari Gambar 8.12 di samping, kita peroleh

$BE^2 = AB^2 + AE^2$
$= p^2 + t^2$
$BE = \sqrt{p^2 + t^2}$

$BG^2 = BC^2 + CG^2$
$= \ell^2 + t^2$
$BG = \sqrt{\ell^2 + t^2}$

$EG^2 = EF^2 + FG^2$
$= p^2 + \ell^2$
$EG = \sqrt{p^2 + \ell^2}$

Contoh SOAL

Perhatikanlah gambar balok *ABCD.EFGH* di bawah ini. Diketahui $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm, dan $CG = 6$ cm. Tentukanlah panjang diagonal sisi

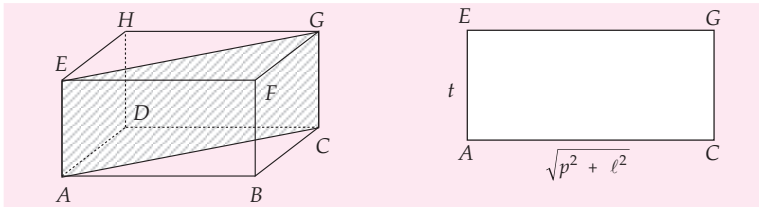
a. *AC*,
b. *AF*, dan
c. *AH*.

Penyelesaian:

a. Diagonal sisi $AC = \sqrt{p^2 + \ell^2} = \sqrt{12^2 + 8^2}$
$= \sqrt{144 + 64} = \sqrt{208}$
$= 14{,}42$ cm

b. Diagonal sisi $AF = \sqrt{p^2 + t^2}$
$= \sqrt{12^2 + 6^2}$
$= \sqrt{144 + 36}$
$= \sqrt{180} = 13{,}42$ cm

c. Diagonal sisi $AH = \sqrt{\ell^2 + t^2}$
$= \sqrt{8^2 + 6^2}$
$= \sqrt{64 + 36}$
$= \sqrt{100}$
$= 10$ cm

c. Bidang Diagonal Balok

Pengertian bidang diagonal balok sama seperti pada kubus. Pada Gambar 8.13 terlihat daerah yang diarsir, yaitu *ACGE* dibatasi oleh dua diagonal sisi (*AC* dan *GE*) dan dua rusuk (*AE* dan *CG*). Bidang *ACGE* merupakan bidang diagonal balok *ABCD.EFGH*.

Gambar 8.13 Bidang diagonal balok

Sekarang, mari kita cari luas *ACGE*. Bidang *ACGE* berbentuk persegi panjang (Gambar 8.13) sehingga kita peroleh

$$L_{\square ACGE} = AC \times AE$$
$$= \sqrt{p^2 + \ell^2} \times t \quad \text{(karena } AC = \text{diagonal sisi)}$$
$$= t\sqrt{p^2 + \ell^2}$$

Contoh SOAL

Diketahui sebuah balok *ABCD.EFGH* dengan ukuran $AB = 16$ cm, $BC = 12$ cm, dan $CG = 9$ cm. Tentukanlah luas bidang diagonal balok *ABGH*, *BEHC*, dan *ACGE*.

Penyelesaian:

Perhatikanlah balok *ABCD.EFGH* pada Gambar 8.13.

a. Luas bidang diagonal balok *ABGH* adalah

$$L = p\sqrt{\ell^2 + t^2}$$
$$= 16\sqrt{12^2 + 9^2}$$
$$= 16\sqrt{144 + 81}$$
$$= 16\sqrt{225}$$
$$= 16 \times 15$$
$$= 240 \text{ cm}^2$$

b. Luas bidang diagonal balok *BEHC* adalah

$$L = \ell\sqrt{p^2 + t^2}$$
$$= 12\sqrt{16^2 + 9^2}$$
$$= 12\sqrt{256 + 81}$$
$$= 12\sqrt{337}$$
$$= 12 \times 18{,}35 = 220{,}29 \text{ cm}^2$$

c. Luas bidang diagonal balok *ACGE* adalah

$$L = t\sqrt{p^2 + \ell^2}$$
$$= 9\sqrt{16^2 + 12^2}$$
$$= 9\sqrt{256 + 144}$$
$$= 9\sqrt{400}$$
$$= 9 \times 20 = 180 \text{ cm}^2$$

d. Diagonal Ruang Balok

Cobalah kalian perhatikan garis *DF* pada Gambar 8.14. Garis *DF* berada di dalam balok *ABCD.EFGH*. Garis *DF* dinamakan diagonal ruang balok. *Cobalah kalian sebutkan diagonal ruang balok yang lain. Berapa banyak diagonal ruang balok seluruhnya?*

Gambar 8.14 Diagonal ruang balok

Sekarang, marilah kita mencari panjang diagonal ruang balok (panjang *DF*). Garis *DF* merupakan diagonal bidang diagonal *BDHF*. Dengan menggunakan dalil Pythagoras, kita peroleh

$DF^2 = DB^2 + BF^2$

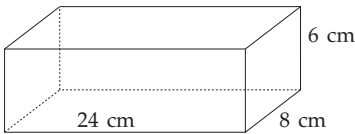
DB merupakan diagonal sisi balok dengan panjang $\left(\sqrt{p^2 + l^2}\right)$, maka

$$DF^2 = \left(\sqrt{p^2 + l^2}\right)^2 + t^2$$
$$= p^2 + \ell^2 + t^2$$
$$DF = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$

Cobalah kalian cari panjang diagonal ruang balok yang lain. Sama panjangkah semua diagonal ruang balok?

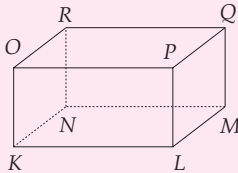
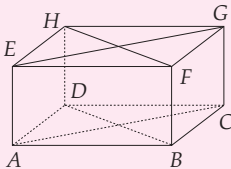
Contoh SOAL

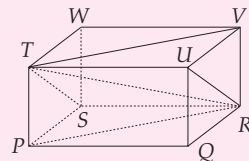
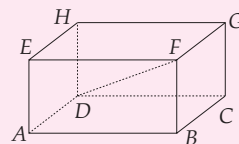
Sebuah balok mempunyai ukuran panjang 24 cm, lebar 8 cm, dan tinggi 6 cm. Tentukanlah panjang diagonal ruangnya.

Penyelesaian:

Misal, s = panjang diagonal ruang balok

$$s = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$
$$= \sqrt{24^2 + 8^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{576 + 64 + 36}$$
$$= \sqrt{676}$$
$$= 26 \text{ cm}$$

LATIHAN 4

1. Perhatikanlah balok *KLMN.OPQR* di samping. Tentukanlah bidang diagonal yang sama dan sebangun dengan
   a. *KLQR*
   b. *LMRO*
   c. *KMQO*

2. Perhatikanlah gambar di bawah ini.

   Pada balok *ABCD.EFGH* dibuat bidang diagonal *ACGE* dan *BDHF*. Gambarlah garis potong kedua bidang diagonal tersebut.

3. Perhatikanlah balok *PQRS.TUVW* di bawah ini. *TR* adalah garis potong antara dua bidang diagonal. Tentukanlah kedua bidang diagonal tersebut.

4. Perhatikanlah balok *ABCD.EFGH* di bawah ini. *DF* adalah garis potong antara bidang diagonal *DBFH* dan bidang diagonal *CDEF*. Tentukanlah pasangan bidang diagonal yang lain yang garis potongnya *DF*.

B Cara Melukis Kubus dan Balok

Kalian tentunya telah mengenal bagian-bagian kubus dan balok. Pada pembahasan kali ini akan dipelajari cara melukis kubus dan balok. Untuk mengetahui bagaimana cara melukisnya, perhatikan penjelasan berikut.

1 Cara Melukis Kubus

Cara melukis kubus yang sering kita lakukan dan kita lihat pada selembar kertas merupakan cara proyeksi miring. Namun, kita tidak begitu menyadarinya. Dengan proyeksi miring kita akan dapat melukis kubus dengan tepat, apalagi jika kita menggambar pada kertas berpetak.

Sebelum kita melukis kubus dengan cara proyeksi miring, marilah kita perhatikan dahulu istilah-istilah yang berhubungan dengan hal tersebut.

a. Bidang Frontal

Bidang frontal adalah bidang yang tampak dengan jelas pada gambar. Bidang frontal sejajar dengan bidang gambar. Bidang frontal pada kubus biasanya digambar dengan ukuran sebenarnya. Pada Gambar 8.15 (a), *ABFE* merupakan bidang frontal.

b. Bidang Ortogonal

Bidang ortogonal adalah bidang yang tegak lurus pada bidang frontal. Pada Gambar 8.15 (b), bidang ortogonalnya adalah *ABCD*.

c. Garis Ortogonal

Garis ortogonal adalah garis yang berada pada bidang ortogonal yang tampak jelas tegak lurus pada bidang frontal. Pada Gambar 8.15 (c), *AD* dan *BC* merupakan garis ortogonal.

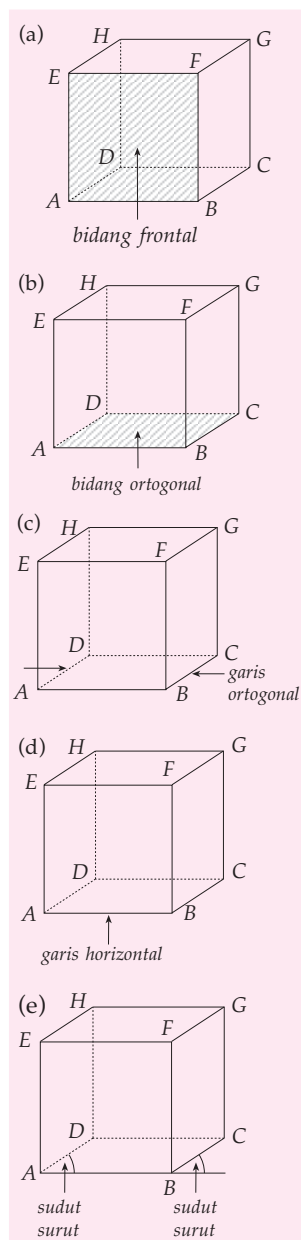
d. Garis Horizontal pada Bidang Frontal

Garis horizontal pada bidang frontal adalah garis yang letaknya horizontal atau mendatar pada bidang frontal. Pada Gambar 8.15 (d), *AB* merupakan garis horizontalnya.

e. Sudut Surut

Sudut surut adalah sudut antara garis ortogonal dan garis horizontal pada bidang frontal. Sudut antara dua garis ini sebenarnya sudut siku-siku, tetapi seperti tampak pada Gambar 8.15 (e) tidak digambar 90°.

f. Perbandingan Proyeksi

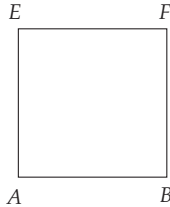
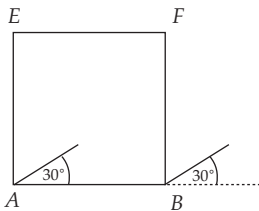
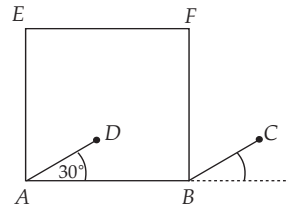
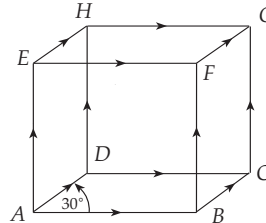
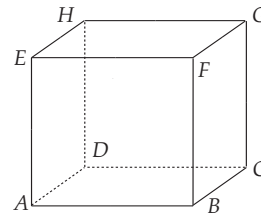
Perbandingan proyeksi adalah perbandingan antara rusuk kubus yang sebenarnya dan rusuk kubus yang akan digambar. Perbandingan proyeksi dipakai untuk menggambar garis ortogonal. Garis ortogonal sebenarnya panjangnya sama dengan rusuk kubus, tetapi digambarkan dengan ukuran yang tidak sebenarnya.

Gambar 8.15 Istilah-istilah pada proyeksi miring

Contoh SOAL

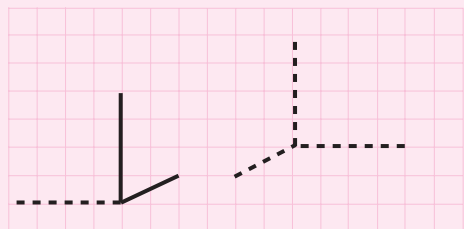
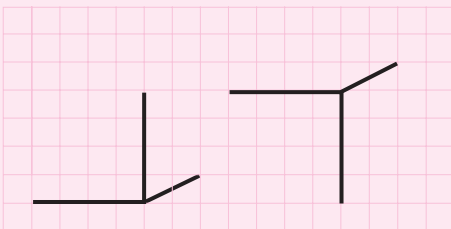
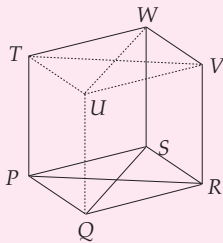
Buatlah kubus dengan rusuk 2 cm, bidang frontal adalah *ABFE*, sudut surut = 30° dan perbandingan proyeksinya = $\frac{1}{2}$.

Penyelesaian:

Langkah-langkah yang harus dibuat adalah sebagai berikut.

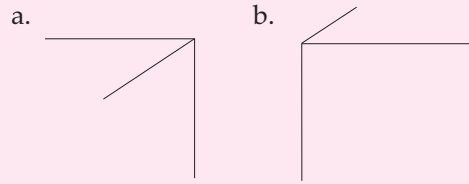
1) Buatlah bidang frontal *ABFE*. *ABFE* dibuat dengan ukuran yang sebenarnya yaitu 2 cm.

2) Dari *A* dan *B* dibuat sudut sebesar 30°

3) Buat *AD* dengan perbandingan proyeksi $\frac{1}{2}$. Artinya *AD* digambar $\frac{1}{2}$ dari panjang rusuk, yaitu 1 cm. Demikian juga dengan *BC*, dibuat 1 cm.

4) Tarik garis-garis yang sejajar rusuk-rusuk kubus yang lain.

5) Buatlah garis putus-putus untuk garis potong bidang yang tidak tampak oleh mata.

LATIHAN 5

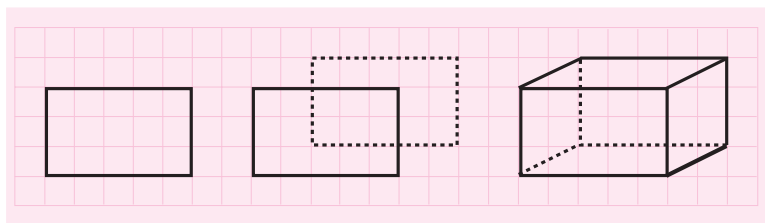
1. Pada gambar di bawah ini terdapat gambar kubus yang belum diselesaikan. Salin dan selesaikan gambar kubus tersebut pada kertas berpetak milikmu.

2. Seperti pada soal nomor 1, salin dan selesaikan gambar kubus berikut pada kertas berpetak milikmu.

3. Perhatikanlah gambar di bawah ini.

Tentukanlah:
a. bidang frontal;
b. bidang ortogonal;
c. garis horizontal pada bidang frontal;
d. sudut surut.

4. Buatlah kubus dengan melengkapi gambar berikut pada bukumu dan berilah nama.

a.

b.

2 Cara Melukis Balok

Seperti pada melukis kubus, melukis balok juga dapat dilakukan dengan proyeksi miring. Melukis balok akan lebih mudah jika dilakukan pada kertas berpetak. Sebagai contoh perhatikanlah Gambar 8.16.

Gambar 8.16 Menggambar balok di atas kertas berpetak

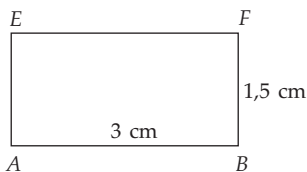
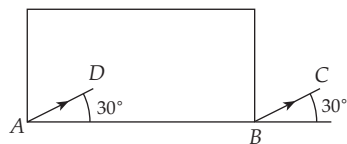
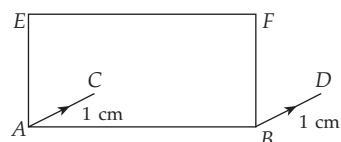
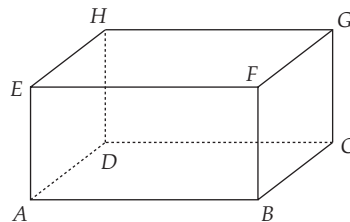
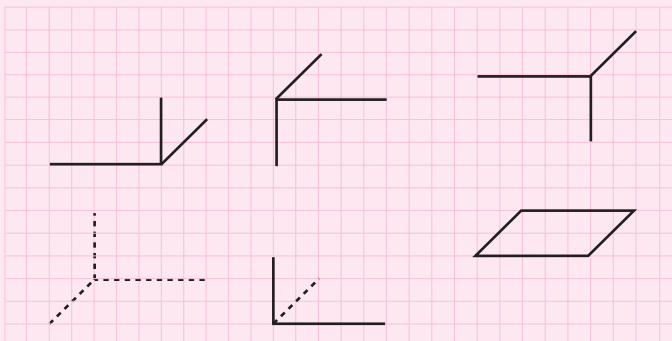
Untuk lebih memahami cara melukis balok, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh SOAL

Gambarlah balok dengan ukuran panjang 3 cm, lebar 2 cm, dan tinggi 1,5 cm. Bidang frontalnya adalah *ABFE* dan perbandingan proyeksinya $\frac{1}{2}$, serta sudut surutnya 30°.

Penyelesaian:

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

1) Kita buat bidang frontal *ABFE* dengan ukuran yang sebenarnya, yaitu panjang 3 cm dan tinggi 1,5 cm.

2) Kita buat sudut surut dari *A* atau *B* sebesar 30°.

3) Setelah itu, kita buat garis *AC* dan *BD*. Karena perbandingan proyeksinya $\frac{1}{2}$ maka garis *AC* dan *BD* digambar $\frac{1}{2}$ dari 2 cm, yaitu 1 cm.

4) Selanjutnya, kita buat garis-garis yang sejajar rusuk-rusuk balok yang lain sehingga terbentuk balok *ABCD.EFGH*. Garis potong bidang yang seharusnya tidak tampak pada gambar kita buat putus-putus.

1. Pada gambar di bawah terdapat gambar balok yang belum diselesaikan. Salin gambar tersebut dan selesaikanlah gambar balok tersebut.

2. Gambarlah balok dengan panjang 5 cm, lebar 4 cm, dan tinggi 3 cm.
3. Seorang anak mempunyai 6 buah lidi dengan ukuran 8 cm dan 6 lidi lainnya dengan ukuran 6 cm. Dapatkah anak tersebut membuat kerangka balok? Coba kalian peragakan.
4. Pada kertas berpetak, gambarlah balok yang berukuran panjang 6 satuan, lebar 4 satuan, dan tinggi 3 satuan. Berilah warna untuk bidang alas dan bidang atasnya.
5. Amatilah gambar balok yang telah kamu buat pada soal nomor 4 di atas. Tuliskan rusuk-rusuk apa saja yang terhalang pandangan. Tuliskan pula bidang-bidang ortogonalnya.

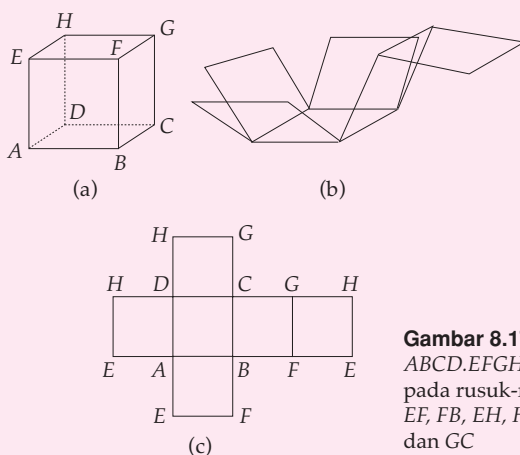
C Jaring-Jaring Kubus dan Balok

Masih ingatkah kalian jaring-jaring kubus dan balok yang telah kalian pelajari di SD? Bagaimana bentuk jaring-jaring kubus dan balok? Untuk mengingat kembali, perhatikan pembahasan berikut.

1 Jaring-Jaring Kubus

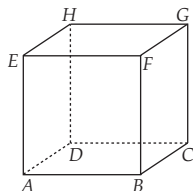
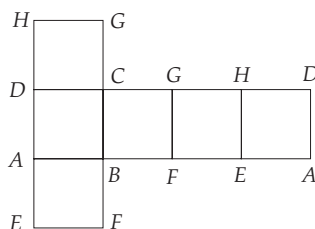
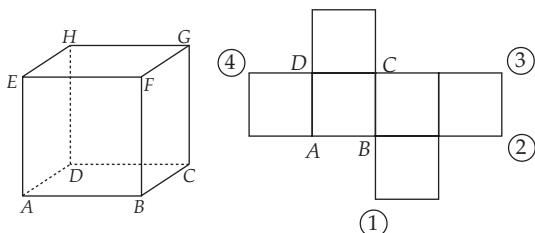
Agar kalian lebih memahami bentuk jaring-jaring kubus, lakukan kegiatan berikut ini.

1. Carilah kotak yang berbentuk kubus. Berilah nama tiap titik sudutnya, misalnya *A, B, C, D, E, F, G,* dan *H.*
2. Setelah itu irislah kubus itu sepanjang rusuk yang kalian kehendaki sampai kubus itu bisa terbuka.

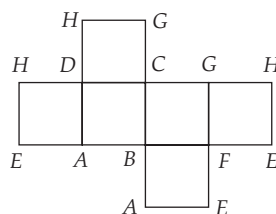
   Sebagai contoh perhatikanlah Gambar 8.17. Pada Gambar 8.17, kubus *ABCD.EFGH* diiris sepanjang rusuk-rusuk *AE, EF, FB, EH, HD, HG,* dan *GC.* Setelah dibuka diperoleh jaring-jaring kubus (Gambar 8.17 (c)).
3. Rekatkan lagi jaring-jaring kubus tersebut sehingga menjadi kubus kembali. Iris kubus itu sepanjang rusuk yang lain, kemudian gambarlah bentuk jaring-jaring kubusnya.
4. Ulangi langkah 3 sampai kalian memperoleh sebanyak mungkin bentuk jaring-jaring kubus yang berbeda.

Gambar 8.17 Kubus *ABCD.EFGH* dipotong pada rusuk-rusuk *AE, EF, FB, EH, HD, HG,* dan *GC*

Contoh SOAL

1. Perhatikanlah gambar di bawah ini.

   Buatlah jaring-jaring kubus dari kubus *ABCD.EFGH*. Jika dipotong pada rusuk-rusuk *AD, AE, DH, GH, GC, FB,* dan *EF*.

Penyelesaian:

2. Perhatikanlah gambar kubus dan jaring-jaring kubus *ABCD.EFGH*.

Jika *ABCD* adalah alas kubus, maka tentukanlah huruf-huruf yang ditunjukkan pada nomor-nomor pada gambar di atas.

Penyelesaian:

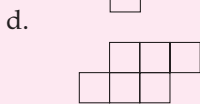
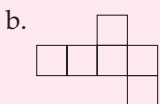
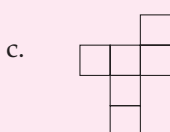
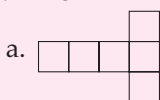
Huruf yang ditunjukkan oleh
nomor 1 adalah *A*;
nomor 2 adalah *E*;
nomor 3 adalah *H*;
nomor 4 adalah *H*.

LATIHAN 6

1. Manakah yang merupakan jaring-jaring kubus?

a.

c.

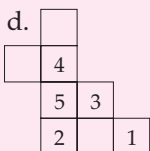
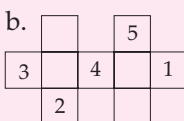
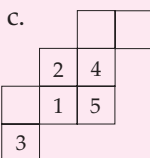
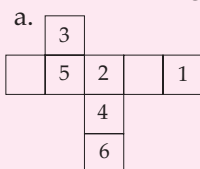
b.

d.

2. Perhatikanlah gambar berikut.

a.

c.

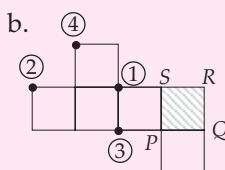
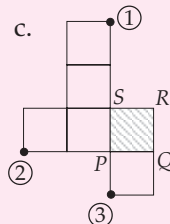
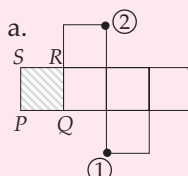
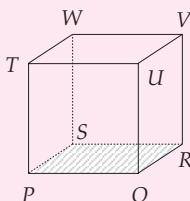
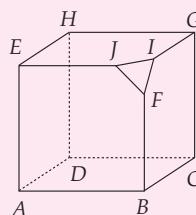
b.

d.

Tentukanlah nomor-nomor berapakah yang harus dihilangkan agar didapat jaring-jaring kubus?

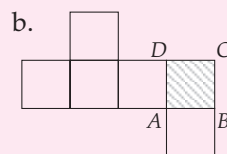
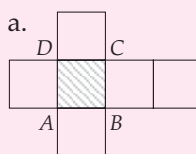
3. Gambar di samping adalah kubus *PQRS.TUVW*. Jika daerah yang diarsir adalah alas, tentukanlah huruf-huruf yang ditentukan oleh nomor-nomor berikut.

a.

c.

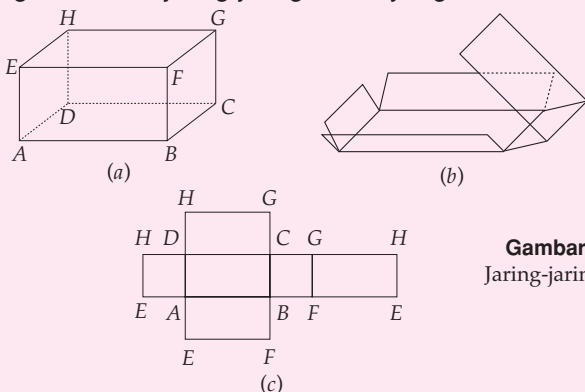
b.

4. Perhatikanlah gambar di bawah ini.

Kubus *ABCD.EFGH* dipotong pada salah satu ujungnya. Salin dan perbaiki gambar berikut agar didapat bentuk jaring-jaring kubus *ABCD.EFGH* yang terpotong tersebut.

a.

b.

2 Jaring-Jaring Balok

Seperti halnya pada kubus, untuk memahami bentuk jaring-jaring balok lakukanlah kegiatan berikut ini.

1. Carilah kotak yang berbentuk balok kemudian berilah nama tiap titik sudutnya, misalnya *A, B, C, D, E, F, G,* dan *H.*
2. Irislah sepanjang rusuk yang kalian kehendaki kemudian bukalah. Jika banyak rusuk yang kalian iris sudah memadai, kalian akan mendapat jaring-jaring balok.

   Sebagai contoh perhatikan Gambar 8.18. Pada gambar tersebut balok *ABCD.EFGH* diiris sepanjang rusuk-rusuk *AE, EH, DH, GH, GC, EF,* dan *FB.* Setelah dibuka diperoleh jaring-jaring balok seperti terlihat pada Gambar 8.18 (c).
3. Rekatkan lagi jaring-jaring tersebut sehingga membentuk balok lagi. Iris balok itu sepanjang rusuk yang lain, kemudian gambarlah bentuk jaring-jaring baloknya.
4. Ulangi langkah 3 sampai kalian memperoleh sebanyak mungkin bentuk jaring-jaring balok yang berbeda.

Gambar 8.18.
Jaring-jaring balok

LATIHAN 7

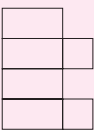
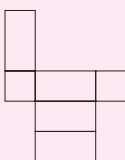
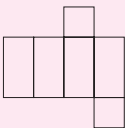
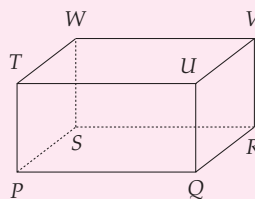
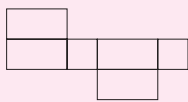
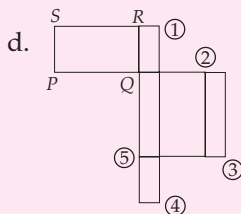
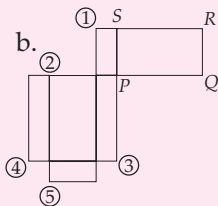
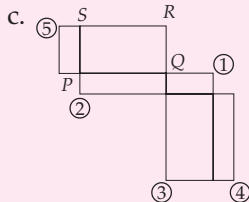
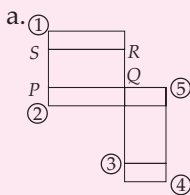
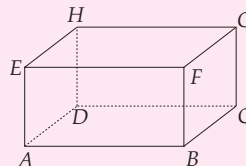
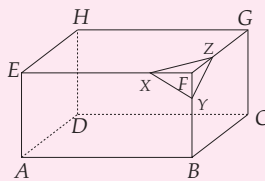
1. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan jaring-jaring balok?

   a.

   c.

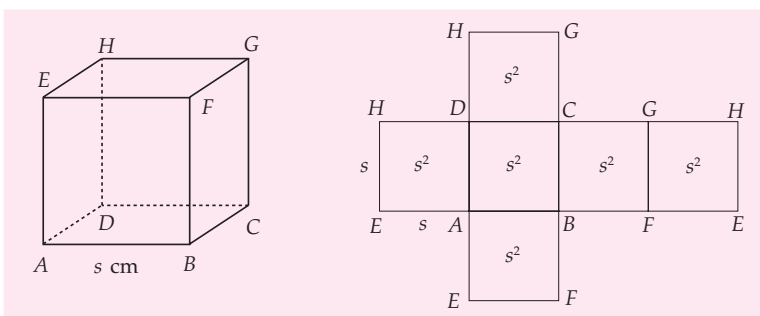
   b.

   d.

2.

   PQRS.TUVW adalah balok dengan alas *PQRS*. Tentukanlah huruf-huruf yang ditunjukkan dengan nomor-nomor berikut.

3. Perhatikanlah gambar balok berikut ini. Buatlah jaring-jaring balok jika balok tersebut dipotong atau diiris pada rusuk-rusuk *AE*, *EF*, *BE*, *HE*, dan *HA*.

4. Diketahui sebuah balok *ABCD.EFGH* dengan panjang 4 cm, lebar 3 cm, dan tinggi 2 cm dipotong pada *XY*, *YZ*, dan *XZ* sehingga titik sudut *F* tidak ada. Buatlah jaring-jaring balok tersebut.

D Luas Permukaan Kubus dan Balok

Kalian telah mempelajari jaring-jaring kubus dan balok. Pada pembahasan berikut akan kita gunakan jaring-jaring kubus dan balok untuk menentukan luas permukaan kubus dan balok. Untuk mengetahui lebih jelas perhatikan penjelasan berikut.

1 Luas Permukaan Kubus

Pada bagian sebelumnya kita telah membahas mengenai jaring-jaring kubus. Salah satu contoh bentuk jaring-jaring kubus seperti terlihat pada Gambar 8.19.

Gambar 8.19 Kubus *ABCD.EFGH* dan salah satu jaring-jaringnya

Jika panjang rusuk suatu kubus adalah s cm, maka luas permukaan kubus tersebut adalah $6s^2$ cm^2.

Dari Gambar 8.19, terlihat bahwa jaring-jaring kubus terdiri atas 6 persegi yang merupakan sisi-sisi kubus itu. Jadi, luas permukaan kubus merupakan jumlah luas keenam persegi tersebut. Jika kita misalkan panjang rusuk kubus adalah s cm, maka

$$\begin{aligned}\text{luas permukaan kubus} &= 6 \times \text{luas persegi}\\ &= 6 \times (s \times s)\\ &= 6 \times s^2 = 6s^2 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Contoh SOAL

1. Panjang rusuk suatu kubus 10 cm, hitunglah luas permukaan kubus.

   Penyelesaian:

   Luas permukaan kubus

   $L = 6a^2$

   $= 6 \times (10)^2$

   $= 6 \times 100 \text{ cm}^2$

   $= 600 \text{ cm}^2$

2. Bu Reza membuat kue berbentuk kubus dengan panjang rusuk 20 cm. Bu Reza akan memasukkan kue tersebut ke dalam kardus. Bu Reza akan membuat kardus sendiri menggunakan kertas karton. Apa yang harus dilakukan Bu Reza?

   Penyelesaian:

   Untuk mengetahui yang harus dilakukan Bu Reza, pertama kali kita cari luas permukaan kue.

   $L_{\text{permukaan kue}} = 6 \times s^2$

   $= 6(20 \text{ cm})^2$

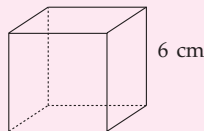
   $= 6 \times 400 \text{ cm}^2$

   $= 2.400 \text{ cm}^2 = 24 \text{ dm}^2$

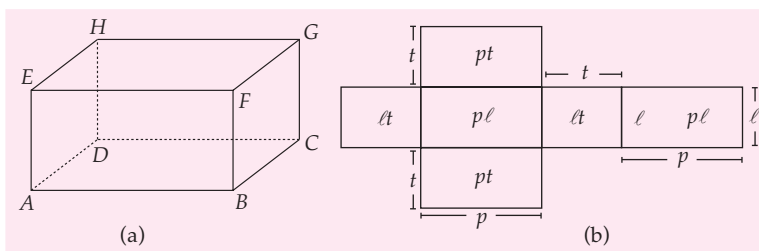
   Karena luas permukaan kue 24 dm^2, maka kertas karton yang dibutuhkan harus lebih dari 24 dm^2 (untuk bagian dilem).

   Jadi, yang harus dilakukan Bu Reza adalah menyiapkan kertas karton lebih dari 24 dm^2.

LATIHAN 8

1. Tentukan luas permukaan kubus di samping.

2. Tentukan panjang rusuk kubus jika luas permukaan kubus
   a. 96 cm^2
   b. 216 cm^2
   c. 244 cm^2
   d. 486 cm^2
   e. 1.064 cm^2
3. Luas alas sebuah kardus yang berbentuk kubus 49 cm^2. Tentukan panjang rusuk dan luas permukaan kardus.
4. Amir akan membuat kotak tisu berbentuk kubus menggunakan tripleks. Jika panjang rusuk kotak tersebut 25 cm, berapa luas tripleks yang diperlukan Amir?

2 Luas Permukaan Balok

Pada pembahasan sebelumnya kita telah mempelajari jaring-jaring balok, yang salah satunya seperti terlihat pada Gambar 8.20.

Gambar 8.20 Balok *ABCD.EFGH* dan salah satu jaring-jaringnya

Pada Gambar 8.20 terlihat bahwa jaring-jaring balok terdiri atas 6 persegi panjang. Jadi, luas permukaan balok merupakan jumlah luas keenam persegi panjang tersebut.

Jika kita misalkan p = panjang balok, l = lebar balok, dan t = tinggi balok, maka

$$\begin{aligned}\text{luas permukaan balok} &= lt + pt + pl + lt + pt + pl \\ &= lt + lt + pt + pt + pl + pl \\ &= (2 \times lt) + (2 \times pt) + (2 \times pl) \\ &= 2\,(lt + pt + pl)\end{aligned}$$

Luas permukaan balok = $2\,(lt + pt + pl)$

Contoh SOAL

1. Sebuah balok mempunyai ukuran panjang 10 cm, lebar 5 cm, dan tinggi 2 cm. Hitunglah luas permukaan balok tersebut.

   Penyelesaian:

   Luas permukaan balok adalah

   $$\begin{aligned}L &= 2(pl + pt + lt) \\ &= 2\{(10 \times 5) + (10 \times 2) + (5 \times 2)\} \\ &= 2\,(50 + 20 + 10) \\ &= 2\,(80) = 160 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

   Jadi, luas permukaan balok tersebut adalah 160 cm^2.

2. Hitunglah luas permukaan balok jika balok tersebut mempunyai ukuran panjang 15 cm, lebar 8 cm dan tinggi 4 cm.

   Penyelesaian:

   Luas permukaan balok adalah

   $$\begin{aligned}L &= 2(pl + pt + lt) \\ &= 2\{(15 \times 8) + (15 \times 4) + (8 \times 4)\} \\ &= 2(120 + 60 + 32) \\ &= 2(212) = 424 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

   Jadi, luas permukaan balok tersebut adalah 424 cm^2.

LATIHAN 9

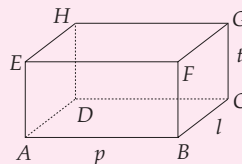
1. Tentukanlah luas permukaan balok jika diketahui

	p	l	t
a	10 cm	8 cm	6 cm
b	12 cm	10 cm	5 cm
c	15 cm	12 cm	10 cm
d	20 cm	15 cm	10 cm

2. Tentukanlah tinggi balok jika luas permukaan 240 cm^2, panjang 10 cm, dan lebarnya 6 cm.

3. Sebuah balok luas permukaannya 700 cm^2. Jika $p : l : t = 4 : 2 : 1$, tentukanlah:
   a. ukuran panjang, lebar, dan tinggi, serta
   b. jumlah panjang rusuknya.

4. Jika luas $ABCD$ = 600 cm^2, luas $BCGF$ = 300 cm^2, dan luas $ABFE$ = 400 cm^2, tentukanlah:
   a. panjang, lebar, dan tinggi;
   b. jumlah panjang rusuk.

5. Rudi akan membuat kotak dari tripleks untuk menyimpan mainannya. Kotak tersebut berukuran panjang = 50 cm, lebar = 40 cm, dan tinggi = 30 cm. Berapa m^2 tripleks yang diperlukan Rudi untuk membuat kotak tersebut? (kotak tanpa tutup)

E Volume Kubus dan Balok

Kalian telah mengetahui rumus luas permukaan kubus dan balok. Pada pembahasan kali ini akan kita pelajari besaran yang lain, yaitu volume kubus dan balok. Untuk mengetahui lebih lanjut, perhatikan pembahasan berikut.

1 Volume Kubus

Kita sudah mengetahui jaring-jaring kubus dan luas permukaan kubus. Pada pembahasan kali ini kita akan mencari rumus volume kubus.

Untuk mencari rumus volume kubus dapat kita gunakan kubus satuan, yaitu kubus dengan panjang rusuk 1 cm. Volume kubus satuan adalah 1 cm^3.

1 cm
1 cm
1 cm

Gambar 8.21 Kubus satuan

Coba kalian perhatikan gambar-gambar kubus berikut dan Tabel 8.2.

Gambar 8.22 Beberapa kubus dengan volume berbeda-beda.

Tabel 8.2 Hubungan Antara Banyak Kubus Satuan dan Volume Kubus

Kubus	Panjang Rusuk	Banyak Kubus Satuan	Volume Kubus
1	1 cm	1	$1^3 = 1$
2	2 cm	8	$2^3 = 8$
3	3 cm	27	$3^3 = 27$
4	4 cm	64	$4^3 = 64$
⋮	⋮	⋮	⋮
...	s cm	...	...

Coba kalian salin dan isi titik-titik pada Tabel 8.2 di buku tulismu sampai kubus yang panjang rusuknya s cm. Berapa volume kubus itu? Jika kalian dapat memahami, kalian akan dapat menemukan rumus volume kubus, yaitu

$$V = s^3$$

dengan V = volume kubus;
s = panjang rusuk kubus.

Contoh SOAL

1. Rusuk suatu kubus adalah 10 cm. Hitunglah volume kubus tersebut.

   Penyelesaian:

   Volume kubus $= s^3$
   $= (10 \text{ cm})^3$
   $= 1.000 \text{ cm}^3$

   Jadi, volume kubus adalah 1.000 cm^3.

2. Suatu kubus volumenya 125 cm^3. Hitunglah panjang rusuknya.

   Penyelesaian:

   $V = s^3$
   $s^3 = 125 \text{ cm}^2$
   $s = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ cm}$

   Jadi, panjang rusuk kubus adalah 5 cm.

LATIHAN 10

1. Salin dan isilah tabel berikut pada bukumu.

	Rusuk	Jumlah panjang rusuk	Luas sisi	Volume	Diagonal sisi	Diagonal ruang
a	40 cm	...	...	...	...	...
b	...	108 cm	...	...	...	...
c	...	...	384 cm^2	...	...	...
d	...	...	...	216 cm^3	...	...
e	...	...	...	...	$9\sqrt{2}$ cm	...
f	...	...	...	...	...	$11\sqrt{3}$ cm

2. Tentukanlah volume kubus jika diagonal sisinya
   a. $6\sqrt{2}$ cm
   b. $8\sqrt{2}$ cm

3. Tentukanlah volume kubus jika luas sisinya
   a. 150 cm^2
   b. 216 cm^2

Tugas Siswa

Ulya mempunyai 2 kardus. Kardus 1 berbentuk kubus dengan panjang rusuk s cm. Kardus 2 mempunyai alas berbentuk persegi dengan panjang sisi s cm tetapi tingginya dua kali tinggi kardus 1.

a. Tentukan volume dan luas permukaan setiap kardus.
b. Berapa perbandingan volume kedua kardus?
c. Apakah perbandingan volume kedua kardus sama dengan perbandingan luas permukaannya?

2 Volume Balok

Untuk mencari volume balok dapat kita gunakan kubus satuan yang dipakai untuk mencari volume kubus.

Marilah kita perhatikan balok pada Gambar 8.23(a). Balok tersebut disusun dari 6 kubus satuan, sehingga volume balok tersebut adalah 6 cm^3. Mari kita perhatikan lagi balok pada Gambar 8.23(b). Balok tersebut tersusun atas 12 kubus

satuan sehingga volume balok tersebut adalah 12 cm^3. Untuk mencari rumus volume balok, mari kita perhatikan ukuran dari balok tersebut.

Panjang balok terdiri atas 6 kubus satuan, panjang balok 6 cm.

Lebar balok terdiri atas 2 kubus satuan, lebar balok 2 cm.

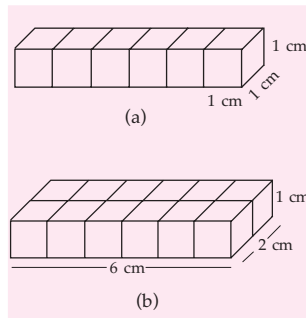
Tinggi balok terdiri atas 1 kubus satuan, tinggi balok 1 cm.

Akan kita cari hubungan volume balok dengan ukuran-ukuran balok tersebut. Telah kita ketahui volume balok = 12 cm^3, panjang balok 6 cm, lebar balok 2 cm, dan tinggi balok 1 cm.

Kita peroleh hubungan: $12 = 6 \times 2 \times 1$.

Jadi, volume balok = panjang × lebar × tinggi

Jika p = panjang, l = lebar, t = tinggi, dan V = volume balok, maka

$$V = p \times l \times t$$

Gambar 8.23 Volume balok

Contoh SOAL

1. Sebuah balok mempunyai ukuran panjang 15 cm, lebar 10 cm, dan tinggi 5 cm. Hitunglah volume balok tersebut.

   Penyelesaian:

   Volume balok = $p \times l \times t$

   $= 15 \times 10 \times 5 = 750$ cm^3

2. Rudi mempunyai akuarium berukuran panjang 200 cm, lebar 8 dm, dan tinggi 0,75 m. Rudi akan mengisi setengah akuarium dengan air. Apa yang harus dilakukan Rudi?

   Penyelesaian:

   Diketahui p = 200 cm = 2 m

   l = 8 dm = 0,8 m

   t = 0, 75 m

   Kita cari volume akuarium

   $V = p \times l \times t$

   $= 2 \times 0{,}8 \times 0{,}75 = 1{,}2$ m^3

   Volume setengah aquarium $= \frac{1}{2} \times 1{,}2$

   $= 0{,}6$ m^3

   Jadi, yang harus dilakukan Rudi adalah mengisi akuarium tersebut dengan 0,6 m^3.

LATIHAN 11

1. Tentukanlah volume balok yang ukurannya:
   a. p = 12 cm, l = 10 cm, dan t = 5 cm;
   b. p = 6 cm, l = 5 cm, dan t = 2 cm;
   c. p = 4 cm, l = 3 cm, dan t = 2 cm;
   d. p = 5 cm, l = 4 cm, dan t = 1 cm.
2. Diketahui volume sebuah balok 120 cm^3, panjang 12 cm dan lebar 5 cm. Hitunglah:
   a. tinggi balok, dan
   b. luas sisi balok.
3. Luas sisi balok adalah 880 cm^2. Jika panjang balok tersebut 20 cm dan tinggi 8 cm, hitunglah:
   a. lebar balok, dan
   b. volume balok.
4. Sebuah balok memiliki perbandingan $p : l : t = 5 : 4 : 3$. Jika panjang balok 40 cm, berapakah lebar, tinggi, dan volume balok?
5. Sebuah balok panjang diagonal sisinya adalah 10 cm, $\sqrt{136}$ cm, dan $\sqrt{164}$ cm. Jika panjang balok tersebut 10 cm, hitunglah:
   a. lebar dan tinggi balok, serta
   b. volume balok.

F Aplikasi Kubus dan Balok dalam Kehidupan

Konsep atau pengertian mengenai unsur-unsur yang ada pada kubus dan balok seringkali diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya mengenai volume akuarium, panjang tiang yang menjulang pada bangunan atau panjang rentangan kabel pada jembatan penyeberangan di atas sungai. Pengertian mengenai rusuk, diagonal sisi, diagonal ruang, volume dan luas seringkali digunakan dalam kehidupan sehari-hari.

Contoh SOAL

1. Sebuah akuarium mempunyai ukuran panjang 1,2 m, lebar 0,6 m, dan tinggi 0,5 m diisi air $\frac{3}{4}$ nya. Tentukanlah volume air dalam akuarium itu.

   Penyelesaian:

   $$\text{Volume air} = \frac{3}{4} \times 1{,}2 \text{ m} \times 0{,}6 \text{ m} \times 0{,}5 \text{ m}$$
   $$= \frac{3}{4} \times 12 \text{ dm} \times 6 \text{ dm} \times 5 \text{ dm}$$
   $$= 270 \text{ dm}^3 = 270\ \ell$$

2. Suatu kolam renang berbentuk balok dengan ukuran panjang 50 m, lebar 15 m, dan kedalaman 1 m. Pada kolam renang tersebut bagian dalamnya akan dicat. Jika 1 kaleng cat dapat mengecat 5.000 dm^2, berapa banyak kaleng cat yang diperlukan?

   Penyelesaian:

   Luas bagian dalam kolam adalah

   $= (500 \text{ dm} \times 150 \text{ dm}) + 2 \times (150 \text{ dm} \times 10 \text{ dm}) + 2 \times (500 \text{ dm} \times 10 \text{ dm})$

   $= 75.000 \text{ dm}^2 + 3.000 \text{ dm}^2 + 10.000 \text{ dm}^2$

   $= 88.000 \text{ dm}^2$

   Banyak kaleng cat

   $$= \frac{88.000 \text{ dm}^2}{5.000 \text{ dm}^2} \times 1 \text{ kaleng cat}$$

   = 17,6 kaleng cat.

   Jadi, banyak cat yang diperlukan adalah $17\frac{3}{5}$ kaleng cat.

Tugas Siswa

Sebuah peti kemas berbentuk balok dengan panjang 4 m, lebar 2 m, dan tinggi 1,5 m. Peti kemas tersebut diisi dengan muatan penuh. Jika berat 1 m^3 muatan itu adalah 0,9 ton, hitunglah berat keseluruhan isi peti kemas tersebut!

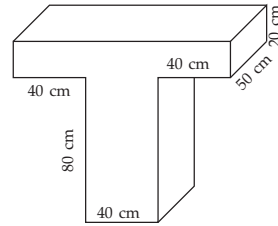
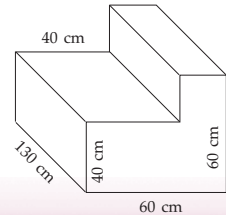
Soal-Soal Kontekstual

1. Seorang anak membeli akuarium dengan ukuran panjang 1 m, lebar 0,6 m dan tinggi 0,5 m. Akuarium itu akan diisi dengan air setinggi $\frac{4}{5}$ bagian. Tentukanlah banyaknya air yang diperlukan (dalam liter).

2. Seorang petani ingin membatasi kebunnya dengan batu bata yang berukuran 20 cm × 10 cm × 5 cm. Jika kebun petani itu berukuran panjang 30 m dan lebar

20 m, berapa banyak batu bata yang diperlukan jika tinggi pagar 1 m?

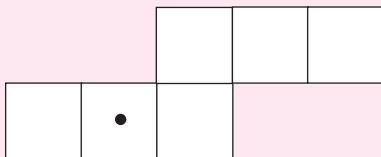
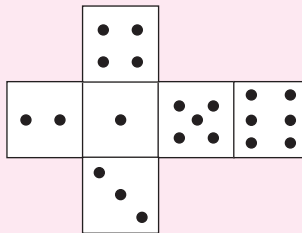
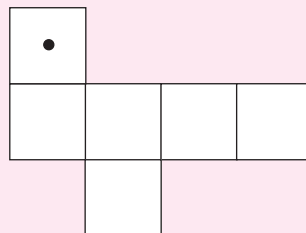
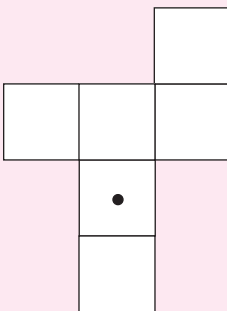
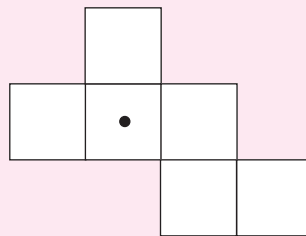
3. Seorang tukang minyak memiliki persediaan minyak yang ditampung pada wadah yang berbentuk balok dengan ukuran panjang 1,2 m, lebar 0,8 m, dan tinggi 0,5 m. Minyak itu akan dipindahkan dengan menggunakan alat yang berbentuk balok juga dengan ukuran 40 cm × 20 cm × 10 cm. Berapa kali alat itu digunakan untuk memindahkan seluruh minyak?

4. Sebuah meja berbentuk seperti gambar di samping. Jika seluruh permukaan meja tersebut akan dicat dan 1 kaleng cat cukup untuk mengecat 0,8 m^2, berapa kaleng cat yang diperlukan untuk mengecat permukaan meja tersebut?

5. Hitunglah volume sebuah tempat duduk yang dibuat dari beton seperti gambar di samping ini.

KEGIATAN

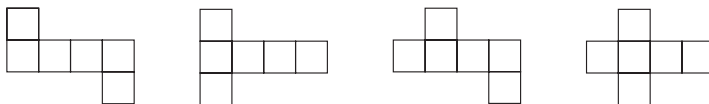
Gambar di samping merupakan jaring-jaring kubus. Setiap sisi yang berseberangan pada kubus di samping mempunyai jumlah "•" adalah tujuh. Salinlah jaring-jaring kubus berikut dan isilah sisi-sisi kubus dengan aturan jumlah "•" dari sisi yang berseberangan adalah tujuh.

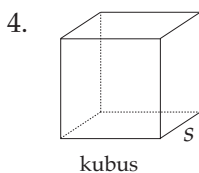
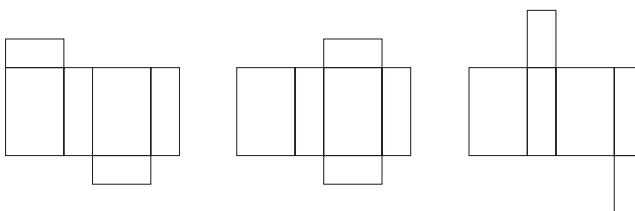
(a)

(b)

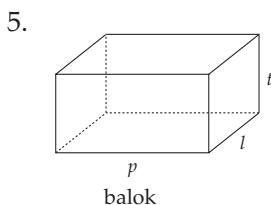
(c)

(d)

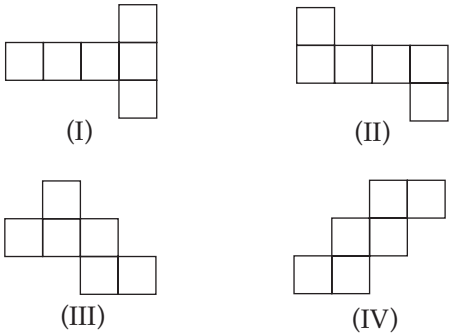
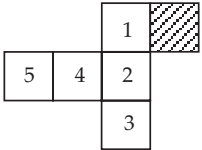
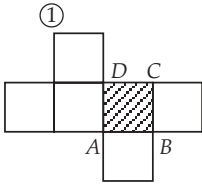
RANGKUMAN

1. Bagian-bagian kubus dan balok
   a. titik sudut;
   b. sisi;
   c. rusuk;
   d. diagonal bidang;
   e. bidang diagonal;
   f. diagonal ruang.
2. Berikut ini adalah beberapa contoh jaring-jaring kubus.

3. Berikut ini adalah beberapa contoh jaring-jaring balok.

4.

kubus

Luas permukaan = $6s^2$
Volume = s^3, dengan
s = panjang sisi kubus

5.

balok

Luas permukaan = $2(pl + pt + lt)$
Volume = $p \times l \times t$, dengan
p = panjang balok
l = lebar balok
t = tinggi

Uji Kompetensi Bab 8

A Pilihan ganda

Berilah tanda silang (×) pada huruf a, b, c, atau d pada jawaban yang benar.

1. Banyak rusuk, titik sudut, dan sisi pada suatu kubus adalah ....
   a. 6, 8, 12　　c. 8, 6, 12
   b. 12, 8, 6　　d. 8, 12, 6

2. Banyak diagonal sisi dan diagonal ruang kubus adalah ....
   a. 12 dan 4　　c. 4 dan 8
   b. 6 dan 4　　d. 6 dan 6

3. Jika sebuah kubus mempunyai rusuk 10 cm maka jumlah panjang rusuknya adalah ... cm.
   a. 60　　c. 120
   b. 90　　d. 180

4. Gambar berikut yang merupakan jaring-jaring kubus adalah ....

(I)

(II)

(III)

(IV)

   a. (I), (II)　　c. (II), (III), (IV)
   b. (I), (II), (III)　　d. (I), (II), (III), (IV)

5. Jika sebuah kubus diagonal ruangnya $8\sqrt{3}$ cm maka jumlah panjang rusuknya adalah ... cm.
   a. 36　　c. 72
   b. 48　　d. 96

6. Sebuah kubus mempunyai volume 1.000 cm^3. Jumlah panjang rusuknya adalah ... cm.
   a. 10　　c. 600
   b. 120　　d. 1.200

7. Diketahui panjang diagonal ruang sebuah kubus adalah $40\sqrt{3}$. Panjang diagonal sisinya adalah ....
   a. $20\sqrt{2}$　　c. 40
   b. $20\sqrt{3}$　　d. $40\sqrt{2}$

8. Pada gambar di bawah ini, daerah yang diarsir adalah alas sebuah kubus. Tutup dari kubus tersebut adalah nomor ....
   a. 1
   b. 3
   c. 4
   d. 5

9. Pada gambar di samping ini, daerah yang diarsir yaitu *ABCD* adalah alas dari sebuah kubus *ABCD.EFGH*. Nomor 1 menunjukkan huruf ....
   a. *E*
   b. *G*
   c. *H*
   d. *F*

10. Sebuah balok mempunyai ukuran panjang 10 cm, lebar 8 cm, dan tinggi 6 cm. Volume dan luas sisi balok tersebut adalah ....
    a. 376 cm^3 dan 376 cm^2
    b. 376 cm^3 dan 480 cm^2
    c. 480 cm^3 dan 376 cm^2
    d. 480 cm^3 dan 480 cm^2

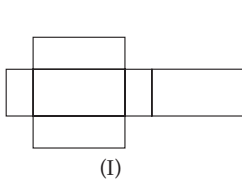
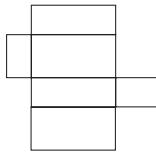
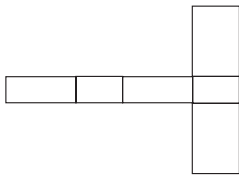
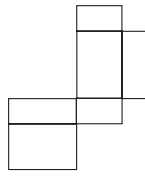
11. Balok dengan ukuran panjang 10 cm, lebar 8 cm, dan tinggi 6 cm. Panjang diagonal ruangnya adalah ....
    a. 10 cm　　c. $\sqrt{200}$ cm
    b. 12 cm　　d. $\sqrt{400}$ cm

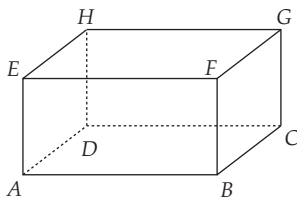
12. Gambar di bawah ini yang merupakan jaring-jaring balok adalah ....

(I)

(II)

(III)

(IV)

a. (I), (II)
b. (II), (III)
c. (I), (II), (III)
d. (I), (II), (III), (IV)

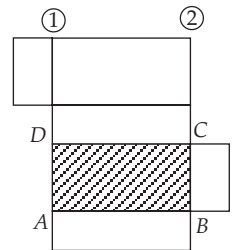
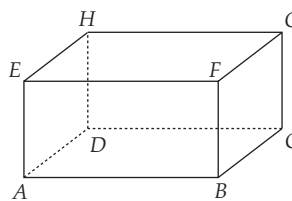
13. Pada balok *ABCD.EFGH*, diketahui luas *ABCD* = 60 cm^2, luas *BCGF* = 30 cm^2, dan luas *CDHG* = 50 cm^2. Volume balok tersebut adalah ....

a. 100 cm^3
b. 150 cm^3
c. 200 cm^3
d. 300 cm^3

14. Sebuah kotak biskuit berisi 10 biskuit berbentuk persegi dengan ukuran 10 cm × 10 cm dan tebal biskuit 0,8 cm. Jika 1 cm^3 biskuit = 2 g, maka berat biskuit tersebut adalah ....
a. 16 g
b. 80 g
c. 160 g
d. 1.600 g

15. Sebuah balok kayu berukuran 20 cm × 10 cm × 8 cm, dipotong menjadi kubus-kubus kecil dengan ukuran 2 cm × 2 cm × 2 cm. Banyak kubus-kubus kecil tersebut adalah ....
a. 10
b. 50
c. 100
d. 200

16. Sebuah bak mandi berbentuk balok dengan ukurannya 80 cm × 50 cm × 60 cm diisi air dengan ketinggian 20 cm. Ke dalam bak tersebut dimasukkan 4 buah kubus dengan rusuk 10 cm. Tinggi air pada bak mandi sekarang adalah ....
a. 20,1 cm
b. 21 cm
c. 22 cm
d. 25 cm

17. Kawat sepanjang 2 m akan dibuat kerangka kubus dengan rusuk 4 cm. Banyak kerangka kubus yang terbentuk adalah ....
a. 3
b. 4
c. 5
d. 6

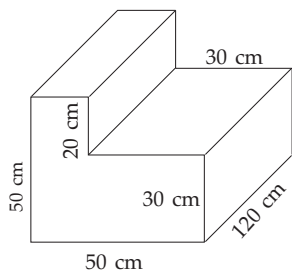
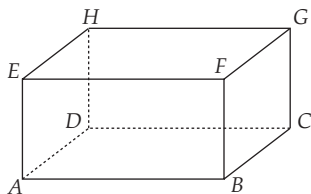
18. Perhatikan gambar di bawah ini.

Pada gambar di atas, *ABCD* adalah alas sebuah balok. Nomor 1 dan 2 adalah huruf-huruf ....
a. *H*, *E*
b. *E*, *F*
c. *F*, *G*
d. *G*, *H*

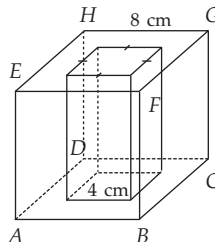
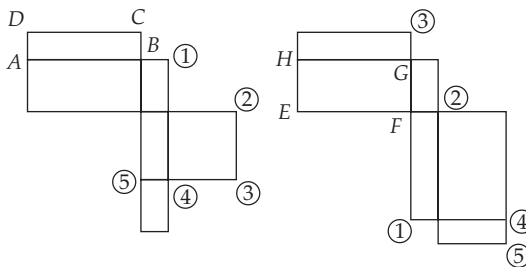
19. Kubus *ABCD.EFGH* mempunyai rusuk 8 cm. Volume kubus tersebut sama dengan volume balok yang panjangnya 12 cm dan lebar 6 cm. Tinggi balok tersebut adalah ....
a. 6 cm
b. 6,1 cm
c. 7 cm
d. 7,1 cm

20. Jika luas permukaan sebuah balok adalah 450 cm^2, panjang balok 15 cm, dan lebarnya 10 cm maka tinggi balok tersebut adalah ....
a. 3 cm
b. 5 cm
c. 6 cm
d. 8 cm

B Esai

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini.

1. Sebuah kubus mempunyai panjang rusuk 10 cm. Hitunglah:
   a. luas sisinya, dan
   b. volumenya.
2. Sebuah kubus volumenya 216 cm^3. Hitunglah:
   a. luas sisinya, dan
   b. jumlah panjang rusuknya.
3. Sebuah akuarium berisi air $\frac{3}{4}$-nya. Akuarium tersebut berbentuk balok dengan ukuran panjang 1,2 m, lebar 60 cm, dan tinggi 50 cm. Akuarium akan dibersihkan dengan mengeluarkan air dari akuarium dengan alat yang tiap menitnya dapat menyedot 20 *l*. Berapa lama air di akuarium itu akan habis?
4. Sebuah tempat duduk dibuat dari beton seperti gambar di bawah ini.

   a. Hitunglah volumenya.
   b. Jika tempat duduk akan dicat, berapakah luas daerah yang akan dicat? (alas tidak dicat)
5. Perhatikan gambar balok di bawah ini.

   ABCD.EFGH adalah sebuah balok dengan panjang $AB = 15$ cm, $BC = 6$ cm, $CG = 8$ cm.

   Hitunglah:
   a. luas bidang diagonal *ABGH;*
   b. luas bidang diagonal *BCHE;*
   c. luas bidang diagonal *ACGE.*
6.

   Gambar *ABCD.EFGH* di atas adalah sebuah kubus yang tepat tengah-tengahnya berlubang. Tentukanlah:
   a. volume kubus berlubang, dan
   b. luas permukaan kubus berlubang.
7. *ABCD.EFGH* adalah balok dengan alas *ABCD.* Tentukanlah huruf-huruf yang ditunjukkan dengan nomor-nomor berikut.

8. Sebuah kubus luas permukaannya sama dengan volumenya. Hitunglah panjang diagonal ruangnya.
9. Dua buah kubus mempunyai perbandingan volume = 27 : 64. Jika luas permukaan kubus yang kecil 216 cm^2, hitunglah luas permukaan kubus yang besar.
10. Jika luas permukaan sebuah balok adalah 12 cm^2, 15 cm^2, dan 20 cm^2, hitunglah volume balok tersebut.

BAB 9 Limas dan Prisma Tegak

Sumber: filelibrary.myaasite

Tujuan Pembelajaran

- Mengenal bagian-bagian limas dan prisma tegak
- Melukis limas dan prisma tegak serta jaring-jaringnya
- Menemukan rumus luas permukaan dan volume limas dan prisma tegak serta dapat menggunakannya dalam pemecahan masalah.

Konsep bangun segitiga, persegi panjang, dan persegi telah kalian pelajari di kelas VII. Kalian harus sudah memahami konsep tersebut sebelum mempelajari konsep yang akan dibahas pada bab ini, yaitu limas dan prisma tegak. Ketika kita mempelajari bangun ruang limas dan prisma akan selalu berhubungan dengan konsep segitiga, persegi panjang, dan persegi.

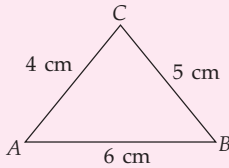
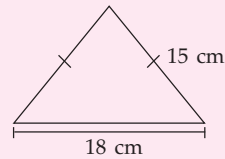
Penerapan konsep limas dan prisma tegak pada kehidupan sehari-hari sangat banyak, misalnya terlihat pada gambar di atas.

Tahukah kalian berbentuk bangun ruang apa bentuk bangunan pada gambar tersebut? Di mana bangunan itu biasa dijumpai? Dapatkah kalian menghitung luas permukaan dan volume bangunan tersebut jika diketahui ukurannya?

Kalian akan dapat menghitung volume bangun tersebut setelah kalian mempelajari bab ini.

Uji Kompetensi Awal

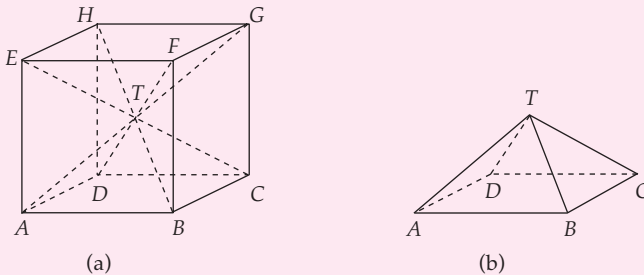
Sebelum mempelajari materi bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

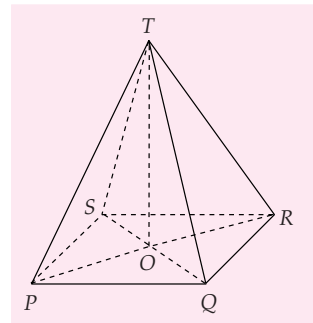
1. Hitunglah keliling ΔABC.

2. Hitunglah luas segitiga jika diketahui panjang alas 9 cm dan tinggi 6 cm.
3. Pipit membuat kartu ucapan berbentuk segitiga. Kartu ucapan itu seperti tampak pada gambar berikut ini.

Hitunglah luas kartu ucapan itu.

4. Sebidang tanah berbentuk segitiga dengan panjang sisi $2a$ m, $4a$ m, dan $6a$ m. Jika keliling tanah itu 144 m, tentukan panjang sisi terpendek dari lapangan itu.

A Bagian-Bagian Limas dan Prisma Tegak

Pada bab sebelumnya telah dipelajari kubus dan balok. Pada pembahasan kali ini akan dipelajari bangun ruang yang lain, yaitu limas dan prisma tegak. Apa saja bagian-bagian dari limas dan prisma? Untuk lebih jelasnya lagi, perhatikan pembahasan berikut.

1 Bagian-Bagian Limas

Gambar 9.1 (a) Kubus *ABCD.EFGH* dan (b) Limas T.*ABCD*

Perhatikan Gambar 9.1(a). Pada gambar tersebut terlihat sebuah kubus yang semua diagonal ruangnya digambar dan diperoleh titik T sebagai titik perpotongan diagonal-diagonal ruang itu. Coba kita perhatikan lebih saksama, jika titik T kita hubungkan ke semua titik sudut kubus, maka akan terbentuk enam limas segi empat yang kongruen. Keenam limas tersebut adalah limas *T.ABCD*, *T.BCGF*, *T.CDHG*, *T.ADHE*, *T.ABFE*, dan *T.EFGH*.

Gambar 9.2 Limas *T.PQRS*

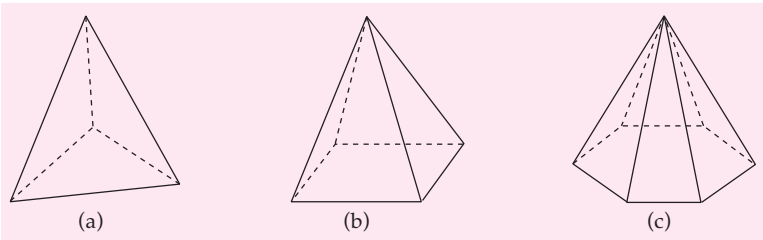
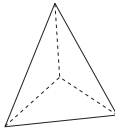
Sekarang, perhatikan limas segi empat $T.PQRS$ pada Gambar 9.2. T adalah titik puncak limas. Bidang $PQRS$ adalah *bidang alas*. Jarak T ke titik perpotongan diagonal bidang alas $PQRS$ disebut *tinggi limas*. Segitiga-segitiga TPQ, TQR, TRS, dan TSP disebut *sisi-sisi tegak*, sedangkan TP, TQ, TR, dan TS adalah *rusuk-rusuk tegak limas*. TPR dan TQS adalah *bidang diagonal*. Diagonal sisi atau diagonal bidangnya hanya terdapat pada sisi alas, yaitu PR dan QS.

Dengan demikian, *limas* adalah bangun ruang yang dibatasi oleh sebuah sisi alas dan sisi-sisi tegak yang berupa segitiga yang satu titik sudutnya saling bertemu.

Math Quiz

Jika pada limas segi-n nilai n mendekati ∞, bangun apa yang kalian peroleh? Jelaskan.

Nama limas diberikan berdasarkan alasnya. Jika suatu limas beralaskan segi-n, maka limas tersebut dinamakan limas segi-n. Jika panjang rusuk alas limas segi-n sama panjang, maka limas tersebut diberi nama limas segi-n beraturan.

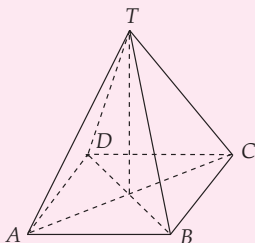
Berikut ini diberikan beberapa limas segi-n beraturan (Gambar 9.3). Mari kita cari hubungan nama sebuah limas dengan banyaknya sisi, titik sudut, dan rusuk pada limas itu.

Gambar 9.3 (a) Limas segitiga beraturan, (b) Limas segi empat beraturan, dan (c) Limas segi enam beraturan.

KEGIATAN

Diskusikan dengan teman sebangkumu, banyak sisi, titik sudut, dan rusuk limas segi-n. Bagaimana hubungan antara banyak titik sudut, banyak sisi, dan rusuk pada limas? Berikut ini diberikan salah satu contoh limas segi-n dan hubungannya dengan banyak sisi, banyak titik sudut, serta banyak rusuk. Jika kalian mengalami kesulitan, carilah informasi dari buku-buku yang ada di perpustakaan sekolah kalian atau coba kalian diskusikan bersama temanmu.

Nama Limas	Banyak Sisi	Banyak titik sudut	Banyak rusuk
limas segi-3	4	4	6

LATIHAN 1

1.

   T.ABCD merupakan limas segi empat beraturan.

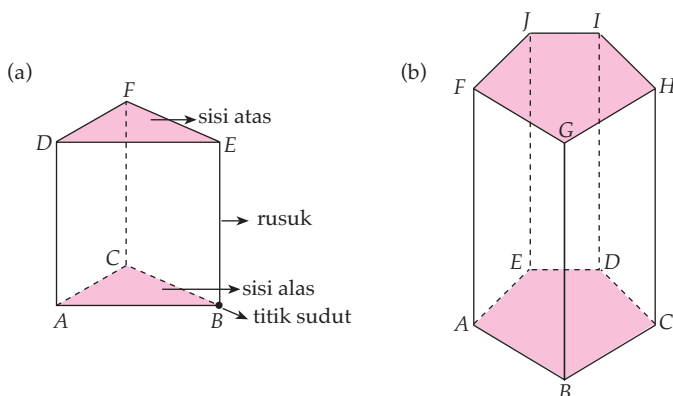
   a. Tentukanlah bidang diagonal limas.

   b. Kongruenkah bidang-bidang diagonal limas tersebut?

2. Adakah bidang diagonal pada suatu limas segitiga? Berikan alasanmu.

3. Tentukan banyaknya bidang diagonal pada limas yang alasnya berbentuk
   a. belah ketupat;
   b. layang-layang;
   c. jajargenjang;
   d. trapesium.

2 Bagian-Bagian Prisma Tegak

Pada Bab 8 kita telah membahas kubus dan balok. Kubus dan balok merupakan salah satu bentuk prisma. Kalau kita perhatikan sisi-sisi yang berhadapan pada kubus dan balok, sisi-sisi tersebut pasti kongruen dan sejajar. Sisi-sisi pada kubus dan balok berbentuk segi empat. Bagaimana jika sisi tersebut berbentuk segitiga atau segi lima? Bentuk apa yang kita peroleh? Perhatikan Gambar 9.4.

Gambar 9.4 (a) Prisma *ABC.DEF* dan (b) Prisma *ABCDE.FGHIJ*

Gambar 9.4(a) merupakan prisma segitiga *ABC.DEF*. Sisi *ABC* dan *DEF* kongruen dan sejajar. Dari kedua sisi tersebut kemudian ditarik garis lurus yang menghubungkan titik sudut yang bersesuaian. Begitu juga dengan Gambar 9.4(b). *Apa yang dapat kalian simpulkan mengenai pengertian prisma?*

Pemberian nama suatu prisma berdasarkan bentuk sisi alas atau sisi atas. Pada Gambar 9.4(a), sisi alas dan sisi atas prisma berbentuk segitiga sehingga prisma tersebut diberi nama prisma segitiga.

Jika nilai n pada prisma segi-n mendekati ∞, bangun apa yang akan diperoleh? Jelaskan.

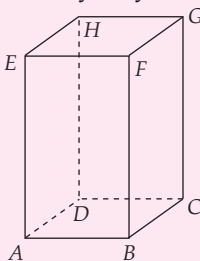
Sekarang mari kita cari hubungan nama prisma dengan banyaknya sisi, titik sudut, dan rusuk pada prisma.

1. Diskusikan dengan teman sebangkumu, banyak sisi, rusuk, dan titik sudut prisma segi-n. Bagaimana hubungan banyaknya titik sudut, banyaknya sisi, dan rusuk pada prisma segi-n?
2. Gunakanlah tabel seperti pada kegiatan di halaman 195!
3. Adakah bidang diagonal pada suatu prisma? Jelaskanlah alasannya. Jika kalian mengalami kesulitan pergilah ke perpustakaan sekolah kalian untuk mencari informasi.
4. Perhatikan prisma *ABCDE.FGHIJ* pada Gambar 9.4(b) di atas. Ada berapakah bidang diagonal pada prisma tersebut? Sebutkan bidang diagonal yang kamu temukan! Berbentuk apakah bidang diagonal tersebut?

LATIHAN 2

1. *ABC.DEF* adalah prisma segitiga. Tentukanlah banyaknya
   a. rusuk;
   b. sisi;
   c. titik sudut;
   d. diagonal bidang;
   e. bidang diagonal;
   f. diagonal ruang.

2. *ABCD.EFGH* adalah prisma dengan alas persegi. Tentukanlah banyaknya
   a. rusuk;
   b. sisi;
   c. titik sudut;
   d. diagonal bidang;
   e. bidang diagonal;
   f. diagonal ruang.

3. Gambar di bawah ini adalah prisma dengan alas segi lima.

   Tentukanlah banyaknya
   a. rusuk;
   b. sisi;
   c. titik sudut;
   d. diagonal bidang;
   e. bidang diagonal;
   f. diagonal ruang.

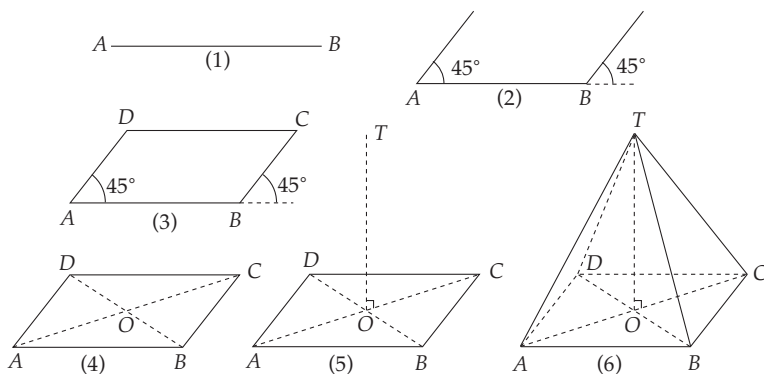
3 Cara Melukis Limas dan Prisma Tegak

a. Cara Melukis Limas

Pada pembahasan kali ini kita akan melukis limas segi empat beraturan. Untuk melukis limas segi empat beraturan, perhatikan kegiatan berikut ini.

KEGIATAN

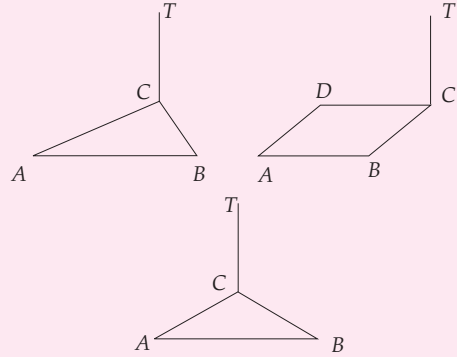
1. Siapkanlah alat-alat berupa busur, pensil, dan penggaris.
2. Buatlah garis *AB*.
3. Buatlah sudut dari *A* sebesar 45° dan dari *B* sebesar 45°.
4. Buatlah garis $AD = \frac{1}{2}AB$ dan $BC = \frac{1}{2}AB$.
5. Hubungkan *D* dan *C*.
6. Hubungkan *A* dan *C*, demikian juga *B* dan *D*. Beri nama perpotongan *AC* dan *BD* dengan *O*.
7. Tarik garis dari *O* tegak lurus dengan *AC* dan *BD*, kemudian beri nama *T* pada ujung garis itu. Hubungkan *TA*, *TB*, *TC*, dan *TD*.
8. Limas *T.ABCD* tergambar.

Berikut ini contoh melukis limas segi empat beraturan.

Gambar 9.5 Cara melukis limas segi empat beraturan

Pada Gambar 9.5, sudut *BAD* biasa disebut *sudut surut*. Besarnya sudut surut sebenarnya adalah 90°, tetapi di dalam Gambar 9.5 dibuat tidak sebenarnya. Pada Gambar 9.5, *AD* dan *BC* juga tidak dilukis atau digambar dengan ukuran sebenarnya yaitu 4 cm, tetapi 2 cm. Hal seperti ini disebut *perbandingan proyeksi*. Perbandingan proyeksi yang kita gunakan adalah $\frac{1}{2}$.

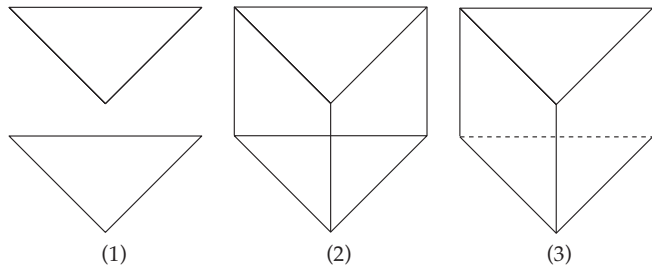
LATIHAN 3

1. Lukislah limas *T.ABCD* dengan alas persegi dengan sisi 4 cm dan titik tinggi pada perpotongan kedua diagonal, tinggi $TO = 4$ cm.
2. Lukislah limas *T.ABC* dengan alas $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm, dan $AC = 5$ cm. Tinggi $TB = 4$ cm.

3. Lukislah limas $T.ABCD$ dengan $ABCD$ adalah persegi panjang yang ukurannya 4 cm × 3 cm, tinggi AT = 3 cm.
4. Lukislah limas $T.ABC$ dengan AC = 3 cm, AB = 5 cm, dan tinggi TC = 3 cm.
5. Bentuk berikut adalah gambar limas dengan titik puncak T. Salin dan lengkapilah gambar berikut pada buku tulismu.

b. Cara Melukis Prisma Tegak

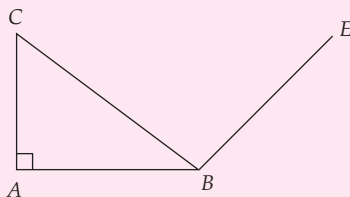
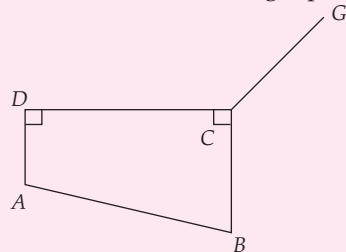
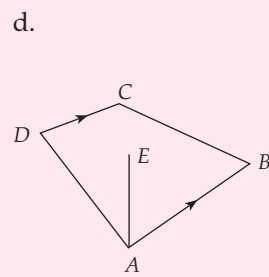
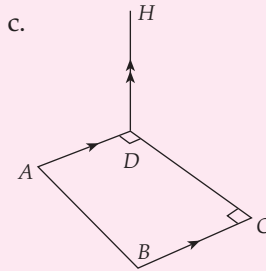
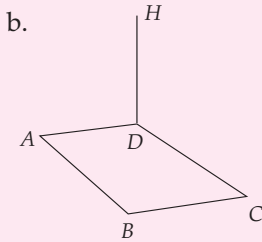
Telah kita ketahui bahwa sisi atas dan sisi alas suatu prisma adalah kongruen dan sejajar. Dengan demikian, langkah-langkah untuk melukis prisma adalah sebagai berikut.

1. Buatlah sisi alas dan sisi atas prisma, harus kongruen dan sejajar.
2. Masing-masing titik sudut dari sisi alas dan atas dihubungkan.
3. Untuk rusuk yang sebenarnya tidak tampak, ganti dengan garis putus-putus.

   Berikut ini contoh melukis prisma segitiga.

Gambar 9.6 Cara melukis prisma segitiga

LATIHAN 4

1. Lukislah prisma segi lima.
2. Salin dan lengkapilah gambar berikut sehingga membentuk sebuah prisma.

3. Gambar berikut adalah gambar prisma $ABCD.EFGH$. Salin dan lengkapilah.

   a.

4 Cara Melukis Jaring-Jaring Limas dan Prisma Tegak

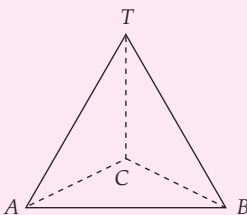
a. Cara Melukis Jaring-Jaring Limas

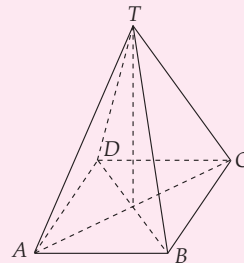
Untuk melukis jaring-jaring limas, coba kalian cari tempat makanan dari kardus yang berbentuk limas. Jika kalian tidak menemukannya, buatlah limas dari kertas karton. Setelah itu, irislah dari titik puncak limas ke semua titik sudut sisi alasnya, kemudian bukalah. Kalian pasti akan mendapatkan jaring-jaring limas. Jiplaklah jaring-jaring limas tersebut pada buku tulismu. Gambar di samping merupakan contoh jaring-jaring limas.

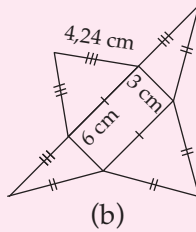
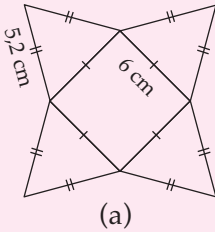
Gambar 9.7 Jaring-jaring limas *T. ABC*

Rekatkan kembali limas yang telah kalian buka tadi dengan menggunakan isolatif. Kemudian, irislah pada sisi yang lain sampai limas tersebut bisa dibuka. Setelah limas terbuka, jiplaklah jaring-jaring limas tersebut pada buku tulismu. Ulangi lagi sampai kalian memperoleh jaring-jaring limas sebanyak mungkin.

LATIHAN 5

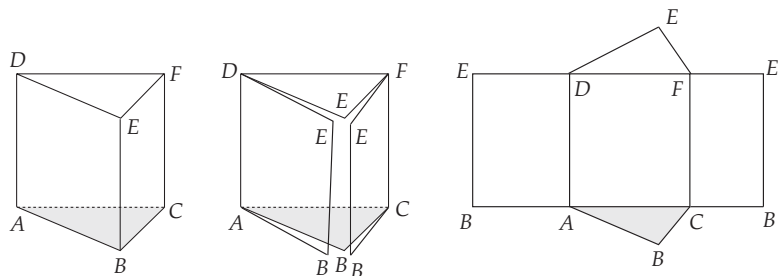
1. Perhatikan gambar di bawah ini.

$T.ABC$ adalah limas dengan alas segitiga sama kaki $AC = BC$. Limas tersebut dipotong pada rusuk TA, TB, dan TC. Buatlah jaring-jaring limas tersebut.

2.

$T.ABCD$ adalah limas dengan alas persegi. Limas tersebut dipotong pada rusuk TA, TB, TC, dan TD. Buatlah jaring-jaring limas tersebut.

3. Buatlah jaring-jaring limas sebanyak mungkin jika alas limas berbentuk segitiga sama kaki.
4. *Diskusikan dengan teman sebangkumu.* Perhatikan jaring-jaring limas berikut ini.

a. Tunjukkan bahwa dengan menggunakan 1 jaring-jaring (a) dan 4 jaring-jaring (b) dapat dibentuk 3 limas yang kongruen.
b. Tunjukkan bahwa dengan menggunakan 1 jaring-jaring (a) dan 4 jaring-jaring (b) dapat dibentuk prisma segi empat berukuran 6 cm × 6 cm × 3 cm.
c. Dari hasil pada bagian (a) dan (b) dapatkah digunakan untuk merumuskan volume limas? Jelaskan alasan kalian.

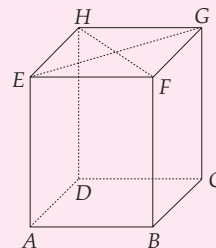
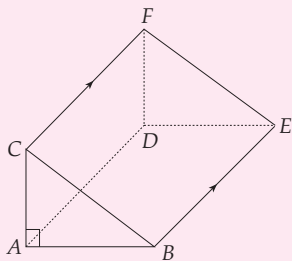
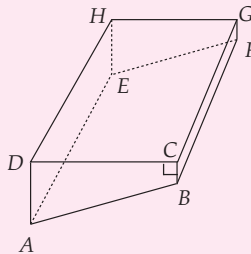
b. Cara Melukis Jaring-Jaring Prisma Tegak

Seperti pada limas, untuk melukis jaring-jaring prisma, carilah bungkus makanan yang berbentuk prisma. Irislah sisi-sisi pada prisma tersebut sampai prisma tersebut dapat dibuka. Setelah terbuka, jiplaklah jaring-jaring prisma yang kalian peroleh pada buku tulismu.

Berikut ini salah satu contoh jaring-jaring prisma segitiga. Cobalah kamu cari bentuk jaring-jaring yang lain. Berapa banyak jaring prisma segitiga yang dapat kamu buat?

Gambar 9.8 Jaring-jaring prisma segitiga *ABC.DEF*

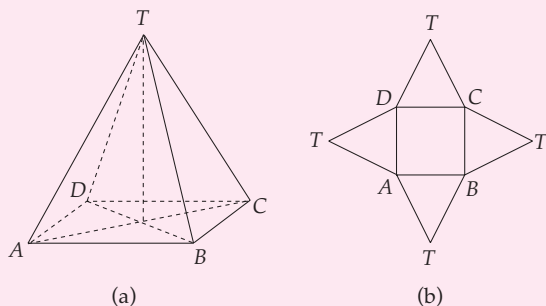
LATIHAN 6

1. Perhatikanlah gambar di bawah ini. Prisma *ABC.DEF* dipotong pada rusuk-rusuk *DF, FE, AC, BC*, dan *CF*. Buatlah jaring-jaringnya.

2. *ABCD. EFGH* adalah prisma dengan alas berbentuk jajargenjang. Buatlah jaring-jaring prisma tersebut sebanyak mungkin.

3. Perhatikan gambar di bawah ini. *ABC.DEF* adalah prisma dengan alas segitiga siku-siku. Buatlah jaring-jaring prisma tersebut sebanyak mungkin.

4. Perhatikan gambar berikut. *ABCD.EFGH* adalah prisma dengan alas berbentuk trapesium. Buatlah jaring-jaring prisma tersebut sebanyak mungkin.

B Besaran-Besaran pada Limas dan Prisma Tegak

Pada subbab sebelumnya telah dipelajari bagian-bagian limas dan prisma. Pada subbab ini akan kita pelajari besaran-besaran yang ada pada limas dan prisma, yaitu luas permukaan dan volumenya. Untuk mengetahui lebih lanjut, perhatikan penjelasan berikut.

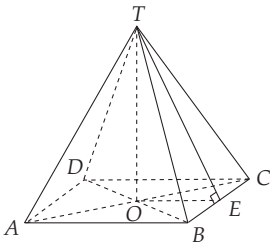
1 Luas Permukaan Limas

Dari pembahasan sebelumnya kita telah mengetahui bentuk jaring-jaring limas. Sebagai contoh, perhatikan Gambar 9.9.

Gambar 9.9 (a) Limas segi empat *T.ABCD* dan (b) Jaring-jaring limas *T.ABCD*

Setelah memperhatikan jaring-jaring di atas, apa yang dapat kalian simpulkan mengenai luas permukaan limas? Bandingkan dengan jawaban teman sebangkumu. Apakah kesimpulan yang kalian dapat sama dengan kesimpulan berikut? Luas permukaan limas diperoleh dengan cara sebagai berikut.

Luas permukaan limas = luas alas + luas semua sisi tegak

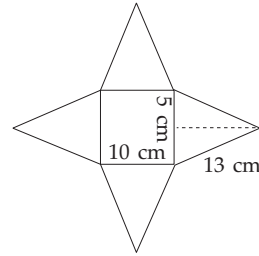
Contoh SOAL

Diketahui limas segi empat beraturan *T.ABCD* dengan panjang rusuk alas 10 cm dan tinggi 12 cm. Hitunglah luas permukaan limas.

Penyelesaian:

$TE^2 = TO^2 + OE^2$

$TE^2 = (12)^2 + 5^2$

$= 144 + 25 = 169 \text{ cm}^2$

$TE = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$

Luas alas = $10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$

Luas sisi tegak $= \frac{1}{2} \times 10 \times 13 = 65 \text{ cm}^2$

Luas permukaan limas

= luas alas + (4 × luas sisi tegak)

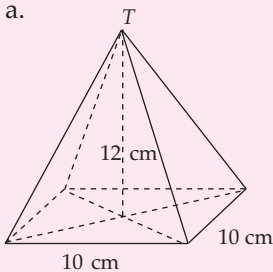
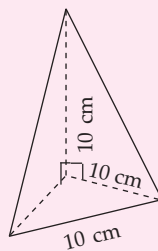
= 100 + (4 × 65)

= 360 cm^2

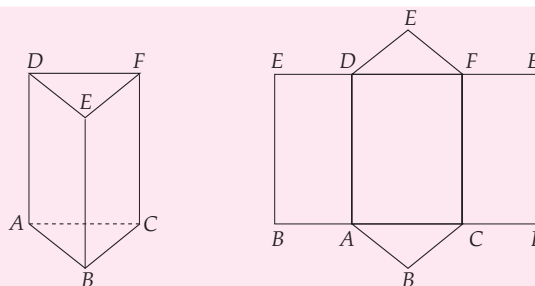
Jadi, luas permukaan limas adalah 360 cm^2.

LATIHAN 7

1. Hitunglah luas permukaan limas di bawah ini.

a.

b.

2. Sebuah limas segi lima beraturan dengan luas alas 56 cm^2. Jika luas permukaan limas adalah 136 cm^2, hitunglah luas sisi tegak limas.
3. Sebuah limas segi lima beraturan. Luas alasnya 72 cm^2 dan volumenya 1.080 cm^3. Hitunglah tinggi limas.
4. Sebuah limas segi empat beraturan dengan panjang rusuk alas b. Hitunglah luas permukaan limas jika rusuk alas = rusuk tegak. (nyatakan dalam b).

2 Luas Permukaan Prisma Tegak

Dari pembahasan sebelumnya kita telah memperoleh jaring-jaring prisma. Sebagai contoh perhatikan Gambar 9.10.

Gambar 9.10 Prisma *ABC.DEF* dan jaring-jaringnya

Dari jaring-jaring prisma di atas dapat kita tentukan luas permukaan prisma sebagai berikut.

Luas permukaan prisma = luas sisi alas + luas sisi atas + luas selubung (sisi-sisi tegak)

= 2 × luas sisi atas + luas selubung

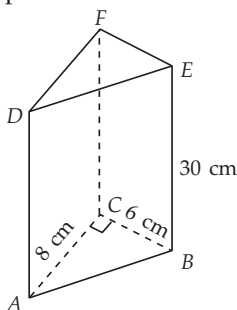
Luas selubung = $AB \times t + BC \times t + AC \times t$

= $(AB + BC + AC) \times t$

= (keliling alas) × t

> Luas permukaan prisma = 2 × luas bidang alas + luas selubung
> = (2 luas alas) + (keliling alas × tinggi)

Contoh SOAL

Sebuah prisma segitiga $ABC.DEF$ memiliki tinggi 30 cm. Jika alas prisma adalah segitiga siku-siku dengan panjang sisi siku-sikunya AC = 8 cm dan BC = 6 cm, tentukanlah luas permukaan prisma.

Penyelesaian:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2 = 100\ \text{cm}^2$

$AB = 10$ cm

Luas segitiga = $\frac{1}{2}$ (6) (8)

= $\frac{1}{2}$ (48) = 24 cm^2

Luas permukaan prisma

= luas sisi-sisi tegak + (2 × luas bidang alas)

= (keliling alas × tinggi) + 2 × (luas segitiga)

= (10 + 6 + 8) 30 + 2 (24)

= 720 + 48 = 768 cm^2

Jadi, luas permukaan prisma adalah 768 cm^2.

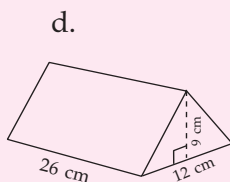
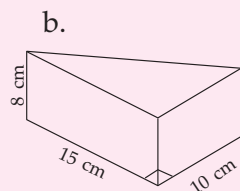
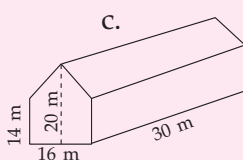
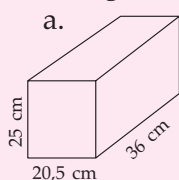
LATIHAN 8

1. Hitunglah luas permukaan bangun ruang di bawah ini.

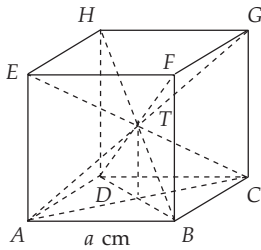
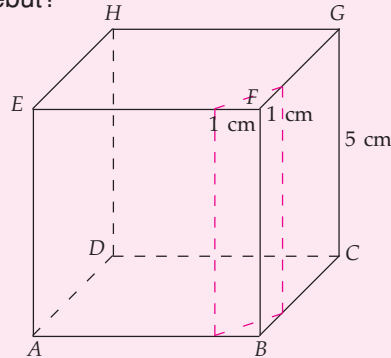
a.

c.

b.

d.

2. Seorang tukang akan membuat bak mandi dengan ukuran panjang = 90 cm, lebar = 70 cm, dan tinggi = 80 cm. Jika sisi-sisi tegak bak dibuat dengan tebal 10 cm, tentukanlah luas permukaan bak bagian dalam.

Tugas Siswa

Sebuah kubus mempunyai panjang sisi 5 cm. Salah satu bagian dari kubus itu dipotong membentuk prisma segitiga. Berapakah luas seluruh permukaan kubus yang telah dipotong tersebut?

Gambar 9.11 Kubus dengan keempat diagonal ruangnya yang berpotongan di T

Rumus volume limas adalah $V = \frac{1}{3} L_a \cdot t$

L_a = luas alas limas

t = tinggi limas

3 Volume Limas

Pada bagian sebelumnya telah kita ketahui bahwa dari sebuah kubus dapat kita peroleh enam limas yang kongruen. Coba kalian perhatikan Gambar 9.11. Dari Gambar 9.11, terlihat bahwa tinggi limas adalah $\frac{1}{2}a$ karena panjang rusuk kubusnya a.

$$\begin{aligned}\text{Volume limas} &= \frac{1}{6} \times \text{volume kubus}\\ &= \frac{1}{6} \times a^3\\ &= \frac{1}{6} \times a^2 \times a\\ &= \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{1}{2}a\end{aligned}$$

Karena $a^2 = L_a$ dan $\frac{1}{2}a = t$, maka

$$V = \frac{1}{3} L_a\, t$$

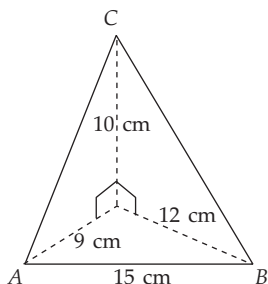
dengan V = volume limas;
L_a = luas alas limas;
t = tinggi limas.

Contoh SOAL

1. Sebuah limas dengan alas segitiga siku-siku yang panjang rusuk-rusuknya 9 cm, 12 cm, dan 15 cm. Jika tinggi limas 10 cm, hitunglah volumenya.

Penyelesaian:

Alas limas berbentuk segitiga siku-siku, maka luas alasnya adalah

$$L_a = \frac{1}{2} (9)\ (12)$$
$$= (6)\ (9)$$
$$= 54 \text{ cm}^2$$
$$V = \frac{1}{3} L_a\ t$$
$$= \frac{1}{3}(54)\ (10)$$
$$= 180 \text{ cm}^3$$

Jadi, volume limas adalah 180 cm^3.

2. Sebuah limas segi empat beraturan volumenya $12a^2$ cm^3. Jika tinggi limas 9 cm, tentukanlah panjang diagonal sisi alas limas.

Penyelesaian:

$$V = \frac{1}{3} L_a\ t$$
$$12a^2 = \frac{1}{3} L_a\ (9)$$
$$4a^2 = L_a$$
$$L_a = 4a^2$$

Karena alas prisma berbentuk persegi, maka panjang rusuknya $= \sqrt{L_a}$

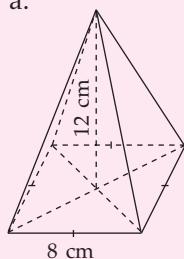
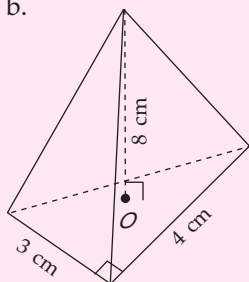
$$= \sqrt{4a^2} = 2a$$

sehingga diperoleh panjang diagonal sisinya $= 2a\sqrt{2}$ cm.

Jadi, panjang diagonal sisi alas prisma adalah $2a\sqrt{2}$ cm.

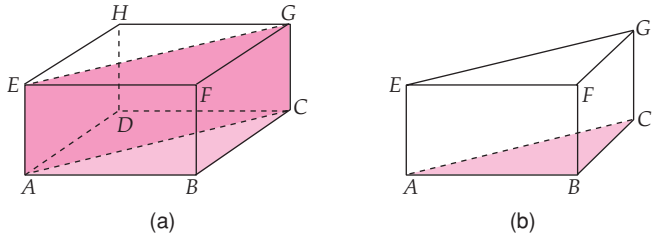
LATIHAN 9

1. Hitunglah volume limas dari gambar berikut.

a.

b.

2. Sebuah limas volumenya 1.568 cm^3 dengan alas persegi. Jika panjang rusuk alasnya 14 cm, hitunglah tingginya.
3. Sebuah limas segi enam beraturan mempunyai panjang rusuk alas 8 cm dan rusuk tegaknya 10 cm. Tentukanlah volumenya.
4. Luas alas suatu limas = luas alas suatu kubus. Jika tinggi limas = $\frac{2}{3}$ tinggi kubus, bagaimana perbandingan volume limas dan kubus?
5. Dua buah limas *A* dan *B* dengan alas berbentuk persegi. Panjang rusuk alas limas *A* $= \frac{2}{5}$ rusuk alas limas *B*. Tinggi limas *A* $= \frac{2}{5}$ tinggi limas *B*. Hitunglah perbandingan volume *A* dan *B*.

4 Volume Prisma Tegak

Gambar 9.12(a) adalah balok *ABCD.EFGH*. Balok tersebut dipotong sepanjang diagonal sisi *EG* secara tegak lurus ke bawah sehingga diperoleh dua bangun ruang yang kongruen dengan alas segitiga, yaitu prisma segitiga *ABC.EFG* dan *ACD.EGH*.

Selanjutnya, perhatikan prisma segitiga *ABC.EFG* pada Gambar 9.12(b). Prisma segitiga *ABC.EFG* merupakan hasil potongan balok *ABCD.EFGH* sehingga volume prisma segitiga *ABC.EFG* sama dengan setengah volume balok.

Gambar 9.12 (a) balok dan (b) prisma segitiga

$$\text{Volume prisma} = \frac{1}{2} \text{ volume balok}$$
$$= \frac{1}{2} \times L_{\square ABCD} \times t$$
$$= \text{luas } \Delta ABC \times t$$
$$= L_a \; t$$

Dengan demikian, volume prisma ditulis

$$V = L_a \, t$$

dengan V : volume prisma;
L_a : luas alas prisma;
t : tinggi prisma.

Contoh SOAL

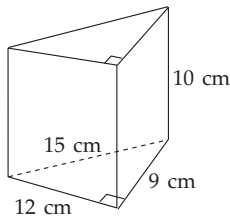
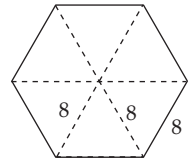
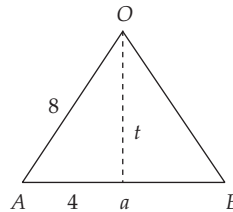
1. Sebuah prisma dengan alas segitiga siku-siku dan tingginya 10 cm. Hitunglah volumenya.

Penyelesaian:

$L_a = \frac{1}{2}$ (12) (9) cm^2 = 54 cm^2

$V = L_a \; t$ = 54 (10) = 540 cm^3

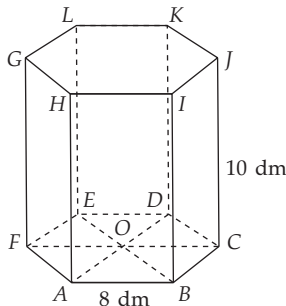
Jadi, volume prisma segitiga adalah 540 cm^3.

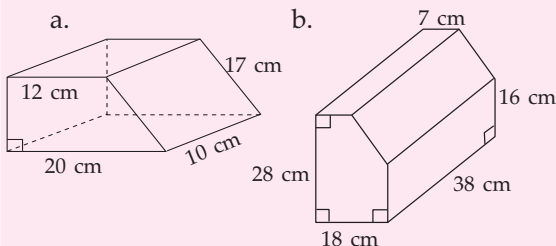
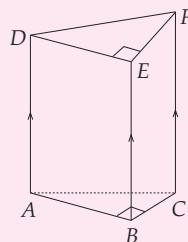
2. Sebuah akuarium berbentuk prisma segi enam beraturan dengan panjang rusuk alasnya 8 dm dan tingginya 10 dm. Hitunglah volume akuarium itu.

Penyelesaian:

$t_\Delta = \sqrt{8^2 - 4^2}$
$= \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$

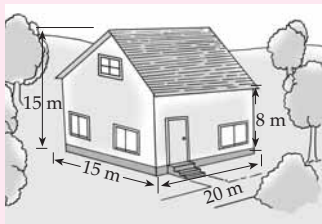
Luas segitiga $= \frac{1}{2} \, a \, t_\Delta = \frac{1}{2}(8)(4\sqrt{3})$
$= 16\sqrt{3}$ dm^2

Luas alas prisma = 6 × luas segitiga
$= 6 \times 16\sqrt{3}$
$L_a = 96\sqrt{3}$ dm^2

Volume prisma $= L_a \times t = (96\sqrt{3})(10)$
$= 960\sqrt{3}$ dm^3

Jadi, volumenya $960\sqrt{3}$ dm^3.

LATIHAN 10

1. Hitunglah volume benda ruang berikut.

2. Volume sebuah prisma segi empat beraturan adalah 54 cm^3. Jika panjang rusuk-rusuk tegaknya 2 kali panjang rusuk alas, bagaimana dengan luas alasnya?
3. Sebuah prisma segi empat beraturan mempunyai volume 800 cm^3. Jika tinggi prisma adalah 8 cm, tentukanlah panjang rusuk alas prisma.
4. Volume prisma segitiga sama dengan volume kubus yang panjang diagonal ruangnya adalah $20\sqrt{3}$ cm. Jika luas alas prisma adalah 320 cm^2, tentukanlah tinggi prisma.
5. Perhatikanlah gambar di samping. *ABC.DEF* merupakan prisma dengan alas segitiga *ABC*. Perbandingan *AB* : *BC* : *BE* = 3 : 4 : 5. Hitunglah panjang rusuk-rusuk prisma jika volumenya 240 cm^3.

Tugas Siswa

Perhatikan gambar di samping. Gambar tersebut adalah bentuk rumah Anton yang ingin dipasang alat pendingin ruangan (*AC*). Harga sebuah *AC* Rp2.550.000,00 dan setiap *AC* hanya cukup untuk mendinginkan ruangan bervolume 150 m^3. Berapakah uang yang harus Anton keluarkan agar cukup untuk mendinginkan seluruh ruangan di dalam rumahnya?

C Aplikasi Limas dan Prisma Tegak dalam Kehidupan

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai benda-benda yang secara geometri berbentuk limas dan prisma. Untuk mengetahui lebih jelas, perhatikan contoh berikut.

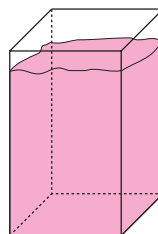
Contoh SOAL

1. Nanang mempunyai akuarium berbentuk prisma segi empat. Alas akuarium berbentuk persegi dengan panjang 30 cm, sedangkan tinggi akuarium 60 cm. Berapa cm^3 Nanang harus menuangkan air ke dalam akuarium agar tidak tumpah?

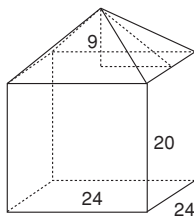
Penyelesaian:

Akuarium Nanang berbentuk prisma segi empat.

$V_{ak} = L_a \times t$

$= (30 \times 30) \times 60$

$= 900 \times 60$
$= 54.000 \text{ cm}^3$

Agar tidak tumpah Nanang harus menuangkan air ke dalam akuarium maksimum 54.000 cm^3.

2. Dina membuat lampion dengan menggunakan kertas *dorslah.* Bentuk lampion seperti terlihat pada gambar di samping ini (bawah terbuka).

Hitunglah kertas *dorslah* yang diperlukan Dina untuk membuat lampion tersebut.

Penyelesaian:

Untuk menghitung kertas *dorslah* yang diperlukan berarti kita harus menghitung luas permukaan lampion itu.

Kita misalkan, $L = L_I + L_{II}$

L_I = Luas permukaan prisma

L_{II} = Luas permukaan limas

$L_I = 4 \times (24 \times 20) = 1.920 \text{ cm}^2$

L_{II} = 4 × luas segitiga yang merupakan sisi tegak limas

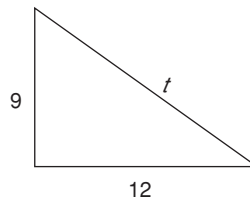
Untuk mengetahui luas segitiga tersebut, kita harus mengetahui tinggi segitiga tersebut. Dengan dalil Pythagoras, kita peroleh

$t^2 = 9^2 + 12^2$

$t^2 = 81 + 144$

$t^2 = 225 \text{ cm}^2$

$t = \sqrt{225}$

$t = 15$ cm.

Jadi, luas segitiga sisi tegak limas

$= \frac{1}{2} \times a \times t$

$= \frac{1}{2} \times 24 \times 15 = 180 \text{ cm}^2$

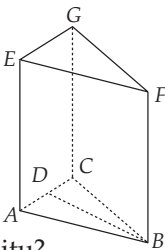
Dengan demikian $L_{II} = 4 \times 180 \text{ cm}^2$
$= 720 \text{ cm}^2$

sehingga, $L = L_I + L_{II}$
$= 1.920 + 720 = 2.640 \text{ cm}^2$

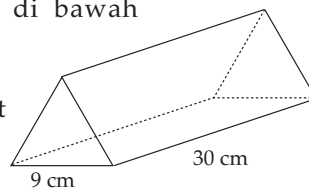
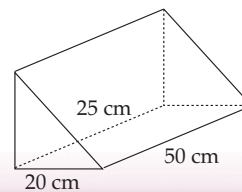
Jadi, kertas *dorslah* yang diperlukan Dina sebanyak 2.640 cm^2.

Soal-Soal Kontekstual

1. Suatu atap rumah berbentuk limas yang alasnya berbentuk persegi dengan sisi 8 m dan tinggi 3 m. Atap tersebut hendak ditutupi dengan genteng berukuran 40 cm × 20 cm. Berapa banyak genteng yang diperlukan untuk menutupi atas tersebut?

2. Sketsa gambar sebuah gedung berbentuk prisma tegak dengan alas segitiga sama kaki, seperti terlihat pada gambar di samping ini. Jika $AB = 10$ m, $BD = 8$ m, tinggi gedung 50 m, berapakah volume gedung itu?

3. Tora membuat mainan menggunakan kertas asturo. Mainan Tora berbentuk limas dengan alas jajargenjang. Panjang sisi jajargenjang 12 cm dan jarak antara sisi ini dengan sisi sejajarnya adalah 15 cm. Jika volume limas 600 cm^3, berapakah tinggi limas tersebut?

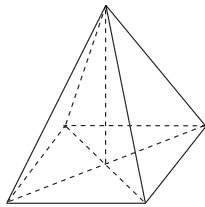
4. Bungkus sebuah cokelat berbentuk prisma segitiga sama sisi, seperti terlihat pada gambar di bawah ini.
Hitunglah volume cokelat yang dapat ditampung oleh bungkus tersebut.

9 cm
30 cm

5. Sebuah tempat sampah memiliki bentuk seperti pada gambar di samping. Hitunglah volume tempat sampah itu.

1. Carilah tempat (bungkus) makanan yang berbentuk limas dan prisma, kemudian ukurlah rusuknya. Setelah itu, hitunglah luas permukaan dan volume dari bungkus tersebut.
2. Tukarkan bungkus yang kalian peroleh dengan yang diperoleh teman sebangkumu. Ukurlah bungkus tersebut kemudian tentukan luas permukaan dan volumenya. Bandingkanlah hasil yang kalian peroleh dengan hasil yang diperoleh temanmu.

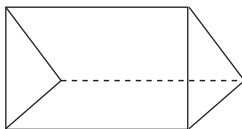
RANGKUMAN

1. Limas adalah bangun ruang yang dibatasi oleh sebuah sisi alas dan sisi-sisi tegak yang berupa segitiga yang salah satu titik sudutnya saling bertemu.
2. Prisma adalah bangun ruang yang dibentuk oleh dua bidang sejajar yang kongruen sebagai bidang alas dan atas serta bidang-bidang lainnya sebagai sisi tegak.
3. Prisma tegak adalah prisma yang rusuk-rusuk tegaknya tegak lurus terhadap bidang alas dan bidang atasnya.
4. Limas

   Luas permukaan = luas alas + jumlah luas sisi tegak

   Volume = $\frac{1}{3}$ × luas alas × tinggi limas

5. Prisma tegak

   Luas permukaan = 2 × luas alas + (keliling alas × tinggi)

   Volume = luas alas × tinggi prisma

Uji Kompetensi Bab 9

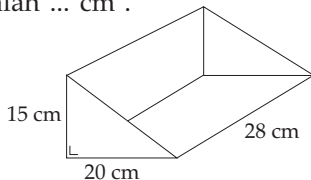
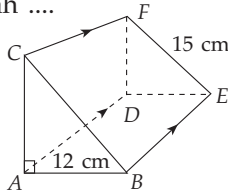
A Pilihan ganda

Berilah tanda silang (×) pada huruf a, b, c, atau d pada jawaban yang benar.

1. Alas suatu limas berbentuk persegi dengan panjang 12 cm. Jika tinggi limas 8 cm maka luas permukaan limas adalah ....
   a. 316 cm^2 c. 336 cm^2
   b. 326 cm^2 d. 384 cm^2

2. Gambar di bawah ini merupakan alat pengumpul sampah (tanpa pegangan) berbentuk prisma segitiga yang dibuat dari plastik. Luas plastik yang diperlukan untuk membuat alat tersebut tanpa pegangan adalah ... cm^2.

   a. 1.280
   b. 1.580
   c. 1.680
   d. 1.980

   15 cm 28 cm 20 cm

3. Perhatikan gambar di bawah ini. Jika luas permukaan prisma = 324 cm^2 maka volume prisma adalah ....
   a. 234 cm^3
   b. 324 cm^3
   c. 342 cm^3
   d. 432 cm^3

4. Limas segi empat beraturan, semua rusuknya sama panjang, yaitu 6 cm. Volume limas adalah ....
   a. 36 cm^3 c. $36\sqrt{3}$ cm^3
   b. $36\sqrt{2}$ cm^3 d. $108\sqrt{2}$ cm^3

5. Sebuah prisma tanpa tutup dengan alas berbentuk belah ketupat. Jika panjang diagonal alasnya masing-masing 8 cm dan 6 cm serta tinggi prisma 12 cm maka luas permukaan prisma adalah ....
   a. 216 cm^2 c. 288 cm^2
   b. 264 cm^2 d. 336 cm^2

6. Sebuah limas dan kubus dengan luas alas limas = luas alas kubus. Jika tinggi limas = $\frac{1}{3}$ tinggi kubus maka perbandingan volume limas dan volume kubus adalah ....
   a. 1 : 9 c. 1 : 3
   b. 2 : 9 d. 2 : 3

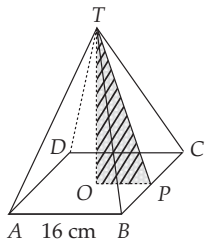
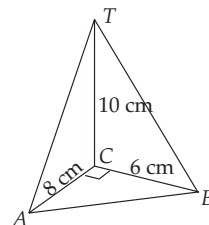
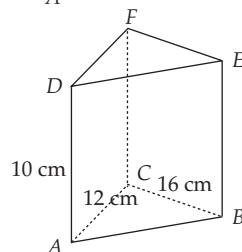
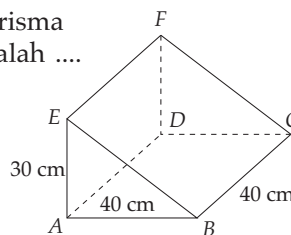
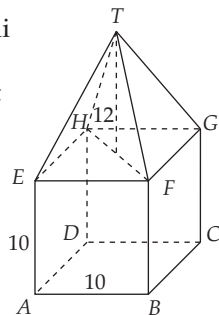
7. Sebuah prisma mempunyai sisi sebanyak 8 buah. Alas prisma itu berbentuk ....
   a. segi-4 c. segi-8
   b. segi-6 d. segi-10

8. Alas prisma berbentuk layang-layang dengan panjang masing-masing diagonalnya *a* cm dan *b* cm, sedangkan tinggi prisma *t* cm. Volume prisma adalah ....
   a. $V = \left(\frac{1}{3}ab + t\right) cm^3$
   b. $V = \left(\frac{1}{3}abt\right) cm^3$
   c. $V = \left(\frac{1}{2}ab + t\right) cm^3$
   d. $V = \left(\frac{1}{2}abt\right) cm^3$

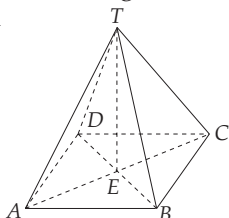
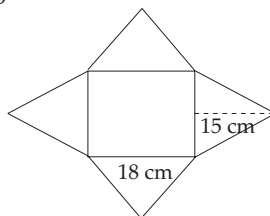
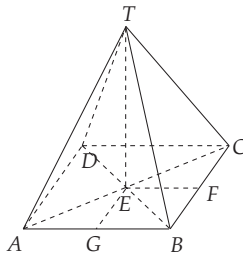
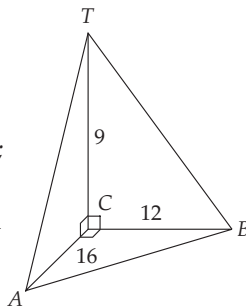
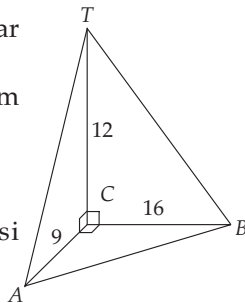
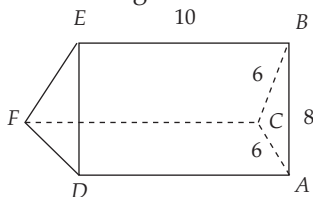
9. Sebuah limas alasnya berbentuk persegi dengan panjang sisi 10 cm dan tinggi limas 12 cm. Jumlah luas sisi tegak limas adalah ....
   a. 520 cm^3 c. 260 cm^3
   b. 390 cm^3 d. 180 cm^3

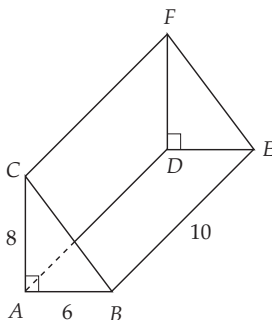
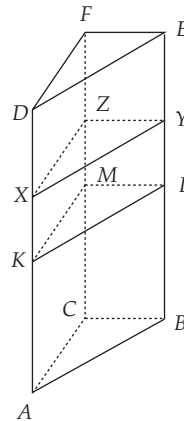
10. Alas limas *T.ABC* berbentuk segitiga siku-siku dengan besar $\angle A = 90°$. Panjang BC = 13 cm, AB = 12 cm, dan tinggi limas 6 cm. Volume *T.ABC* adalah ....
    a. 60 cm^3 c. 360 cm^3
    b. 312 cm^3 d. 936 cm^3

11. Volume limas *T.ABCD* yang alasnya berbentuk persegi adalah 512 cm^3. Panjang *TP* adalah ....

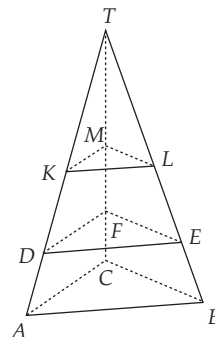
a. 2 cm
b. 10 cm
c. 16 cm
d. 32 cm

12. Limas memiliki alas berbentuk persegi dengan panjang rusuk 6 cm. Jika tinggi 4 cm maka luas permukaan limas adalah ....
    a. 51 cm^2 c. 96 cm^2
    b. 60 cm^2 d. 156 cm^2
13. Diketahui sebuah limas dan kubus dimana luas alas limas = dua kali luas alas kubus. Tinggi limas = $\frac{1}{3}$ tinggi kubus, maka perbandingan volume limas dan kubus adalah ....
    a. 1 : 3 c. 1 : 9
    b. 2 : 9 d. 3 : 1
14. Sebuah prisma tanpa tutup dengan alas berbentuk belah ketupat, panjang diagonal alasnya masing-masing 8 cm dan 6 cm, tinggi prisma 12 cm. Luas permukaan prisma adalah ....
    a. 216 cm^2 c. 288 cm^2
    b. 264 cm^2 d. 336 cm^2
15. Segitiga siku-siku ABC dengan $\angle A$ = 90°, merupakan alas sebuah prisma $ABC.DEF$. Jika luas permukaan prisma 324 cm^2, AB = 12 cm, dan BC = 15 cm, volume prisma adalah ....
    a. 234 cm^3 c. 342 cm^3
    b. 324 cm^3 d. 432 cm^3
16. Luas permukaan sebuah prisma tegak yang alasnya berbentuk segitiga siku-siku adalah 912 cm^2. Jika panjang rusuk alas masing-masing adalah 12 cm, 20 cm, dan 16 cm maka tinggi prisma adalah ....
    a. 3 cm c. 10 cm
    b. 5 cm d. 15 cm
17. Volume dari limas $T.ABC$ adalah ....
    a. 480 cm^3
    b. 240 cm^3
    c. 120 cm^3
    d. 80 cm^3

18. Volume prisma di samping adalah ....
    a. 1.080 cm^3
    b. 960 cm^3
    c. 720 cm^3
    d. 480 cm^3

19. Volume dari prisma di samping adalah ....
    a. 3.000 cm^3
    b. 24.000 cm^3
    c. 60.000 cm^3
    d. 120.000 cm^3

20. Perhatikan gambar di samping. Volume dari gambar tersebut adalah ....
    a. 1.000 cm^3
    b. 1.200 cm^3
    c. 1.400 cm^3
    d. 2.200 cm^3

B Esai

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini.

1. $T.ABCD$ adalah limas dengan alas persegi. AB = 10 cm dan TE = 12 cm. Hitunglah:
   a. volume limas;
   b. luas permukaan limas.

2. Hitunglah volume limas di bawah ini.

3. Perhatikanlah gambar di bawah ini.
   $TE = 12$ cm
   $EG = 9$ cm
   $EF = 16$ cm
   Hitunglah luas permukaan limas tersebut.

4. Perhatikan gambar di samping ini.
   Hitunglah:
   a. *TA*, *TB*, dan *TC*;
   b. volume limas;
   c. luas permukaan limas.

5. Perhatikanlah gambar di samping ini.
   Diketahui $BC = 16$ cm dan $AC = 9$ cm.
   Volume $T.ABC$ = 228 cm^3.
   Hitunglah luas sisi limas.

6. Perhatikanlah gambar di bawah ini.

   Hitunglah luas permukaan prisma.

7. Hitunglah volume dari prisma di bawah ini.

8. Perhatikanlah gambar di bawah ini.

   Diketahui $DX : XK : KA = 2 : 1 : 3$.
   Hitunglah perbandingan volume:
   a. prisma *ABC.DEF* dan prisma *ABC. KLM;*
   b. prisma *KLM.XYZ* dan prisma *XYZ.DEF.*

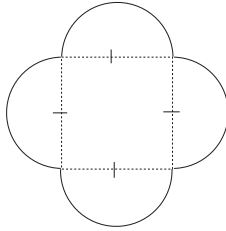
9. Sebuah prisma dengan alas segitiga sama sisi. Tinggi prisma tiga kali tinggi sisi alasnya. Jika luas sisi prisma 225 cm^2, hitunglah volume prisma.

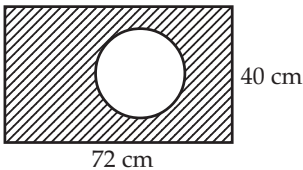
10. Perhatikanlah gambar di bawah ini.

   Diketahui $TM : MF : FC = 3 : 2 : 1$
   Hitunglah perbandingan volume
   a. *T.KLM* : *T.ABC;*
   b. *T.DEF* : *T.KML;*
   c. *ABC.DEF* : *DEF.KLM.*

Latihan Ulangan Umum Semester 2

A Pilihan ganda

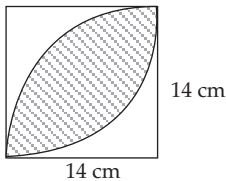
Berilah tanda silang (×) pada huruf a, b, c, atau d pada jawaban yang benar.

1. Garis lengkung yang tampak pada gambar merupakan busur lingkaran. Luas bangunan itu adalah ....
   (gunakan $\pi = \frac{22}{7}$)

   a. 960 cm^2 c. 1.400 cm^2
   b. 1.232 cm^2 d. 2.016 cm^2

2.

   Pada gambar di atas luas daerah yang diarsir adalah 2.264 cm^2. Jika nilai $\pi = \frac{22}{7}$ maka panjang jari-jari lingkaran adalah ....
   a. 7 cm c. 49 cm
   b. 14 cm d. 98 cm

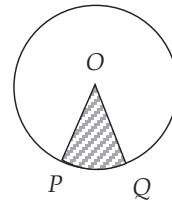
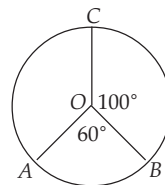
3. Dalam suatu taman berbentuk persegi, di tengahnya terdapat kolam berbentuk lingkaran dengan diameter 14 m. Apabila panjang sisi persegi itu 25 m maka luas taman di luar kolam itu adalah ....
   a. 154 m^2 c. 531 m^2
   b. 471 m^2 d. 616 m^2

4. Luas daerah yang diarsir adalah .... cm^2
   ($\pi = \frac{22}{7}$)

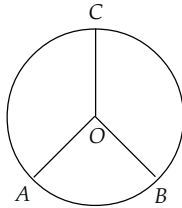
   a. 110
   b. 116
   c. 112
   d. 115

5. Seorang pelari mengelilingi lapangan berbentuk lingkaran sebanyak 5 kali dengan menempuh jarak 1.320 m. Luas lapangan tersebut adalah .... ($\pi = \frac{22}{7}$)
   a. 264 m^2 c. 5.544 m^2
   b. 772 m^2 d. 6.600 m^2

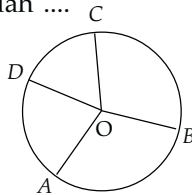
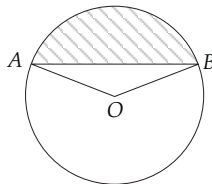
6. Luas lingkaran yang kelilingnya 37,68 cm adalah ....
   a. 37,68 cm^2 c. 113,04 cm^2
   b. 18,84 cm^2 d. 425,16 cm^2

7. Luas juring sebuah lingkaran berjari-jari 3,5 cm dengan sudut pusat 45° adalah ... cm^2.
   ($\pi = \frac{22}{7}$)
   a. 4,5315 c. 4,7325
   b. 4,8125 d. 4,6775

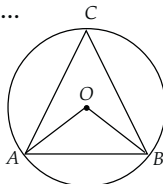
8. Jika luas daerah yang diarsir adalah $\frac{\pi}{6}$ cm^2 dengan OP = 2 cm maka PQ = ... cm
   a. $\frac{\pi}{10}$
   b. $\frac{\pi}{9}$
   c. $\frac{\pi}{3}$
   d. $\frac{\pi}{6}$

9. Pada gambar di samping jika luas AOB = 300 cm^2, luas AOC adalah ... cm^2.
   a. 100
   b. 180
   c. 500
   d. 1000

10. Luas sebuah lingkaran adalah 616 cm^2. Pernyataan di bawah ini yang benar adalah ....
    a. kelilingnya = 44 cm
    b. diameternya = 14 cm
    c. jari-jarinya= 28 cm
    d. diameternya = 28 cm

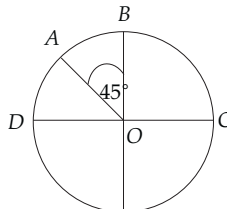
11. Pada gambar di bawah luas $AOB = 144$ cm^2. Panjang busur $AB = 24$ cm dan busur $BC = 36$ cm. Luas BOC adalah ... cm^2

a. 96
b. 120
c. 216
d. 258

12. Luas juring AOB : luas juring BOC : Luas juring COD : Luas juring DOA = 5 : 4 : 3 : 2. Perbandingan panjang busur $AB : BC : CD : DA$ adalah ....

a. 2 : 3 : 4 : 5
b. 4 : 9 : 16 : 25
c. 5 : 4 : 3 : 2
d. 25 : 16 : 9 : 4

13. Perhatikan gambar di bawah. $OA = 21$ cm, $\angle AOB = 120°$. Luas temberengnya adalah ... cm^2.

a. $\frac{441}{4}\sqrt{3\pi} - 147$
b. $\frac{441}{4}\pi - 147\sqrt{3}$
c. $\frac{441}{4}\pi - 147\sqrt{3}$
d. $147\pi - \frac{441}{4}\sqrt{3}$

14. Pada gambar di bawah, besar $\angle OAB$ = 42°. Besar $\angle ACB$ adalah ....

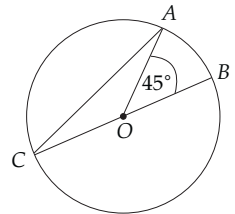
a. 21°
b. 48°
c. 84°
d. 96°

15. Jika panjang busur AB = 4 cm maka panjang busur $ABCD$ adalah ....

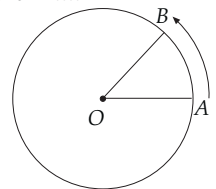
a. 16 cm
b. 28 cm
c. 32 cm
d. 36 cm

16. Sebuah sepeda memiliki jari-jari 84 cm. Jarak yang ditempuh sepeda untuk berputar 6 kali adalah ....

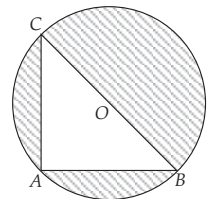
a. 3.246 cm
b. 3.168 cm
c. 3.148 cm
d. 3.024 cm

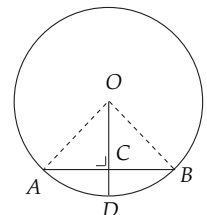
17. Panjang busur sebuah lingkaran berdiameter 42 cm dengan sudut 30° adalah ....

a. 15 cm
b 12 cm
c. 11 cm
d. 9 cm

18. Pada gambar di bawah besar sudut ACB adalah ....

a. 21,5°
b. 22,5°
c. 30,5°
d. 42,5°

19. Dari gambar di bawah, O adalah titik pusat. OA = 14 cm dan $\angle AOB$ = 45°. Panjang busur AB adalah ....

a. 20 cm
b. 18 cm
c. 13 cm
d. 11 cm

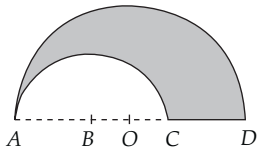
20. O adalah pusat lingkaran. Jika AB = 12 cm dan AC = 16 cm, luas daerah yang diarsir adalah .... cm^2

a. 218
b. 164
c. 122
d. 116

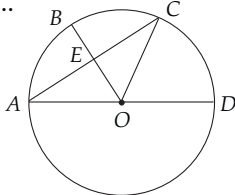
21. O adalah pusat lingkaran dengan jari-jari 25 cm dan CD adalah 1 cm. Panjang AB adalah ....

a. 16 cm
b. 15 cm
c. 14 cm
d. 13 cm

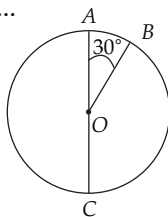
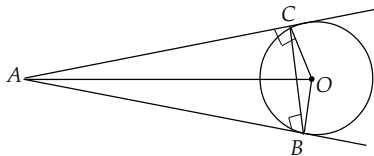
22. Luas lingkaran dengan r adalah jari-jari dan d adalah diameter adalah ....

a. $\frac{1}{4}\pi d^2$
b. $\frac{1}{2}\pi d^2$
c. πd^2
d. $2\pi r$

23. $AO = OD = 10$ cm. $AB = BC = 6$ cm. π = 3,14 cm. Keliling bangun di bawah adalah ....

a. 50,24 cm
b. 57,24 cm
c. 100,48 cm
d. 108,48 cm

24. Jika OE = apotema maka pernyataan yang benar adalah ....

a. $OE = EB$
b. $AC = AD$
c. $AE = EC$
d. $OB = AC$

25. Pada gambar di bawah, sudut AOB = 30°. Jika luas juring AOB = 12 cm^2 maka luas juring BOC adalah ....

a. 15 cm^2
b. 24 cm^2
c. 45 cm^2
d. 60 cm^2

26. Pada gambar di bawah ini panjang jari-jari = 7 cm dan panjang OA = 25 cm. Keliling layang-layang $OBAC$ adalah ....

a. 16,6 cm
b. 62 cm
c. 24 cm
d. 48,2 cm

27. Panjang sebuah garis singgung persekutuan luar dari dua lingkaran 8 cm. Jari-jari kedua lingkaran masing-masing 14 cm dan 8 cm. Jarak kedua titik pusat lingkaran adalah ....

a. 13 cm
b. 12 cm
c. 11 cm
d. 10 cm

28. Panjang rusuk 2 buah kubus masing-masing 3 cm dan 9 cm. Perbandingan volume kedua kubus adalah ....

a. 1 : 3
b. 1 : 6
c. 1 : 9
d. 1 : 27

29. Luas permukaan kubus yang keliling alasnya 30 cm adalah ... cm^2

a. 56,25
b. 225
c. 37,50
d. 450

30. Volume kubus yang luas permukaannya 216 cm^2 adalah ... cm^3.

a. 216
b. 196
c. 144
d. 36

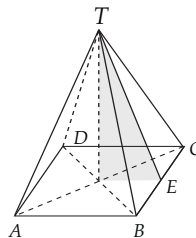
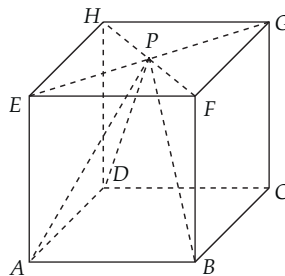
31. Sebuah limas alasnya berbentuk persegi dengan sisi 10 cm dan tinggi 12 cm. Jumlah luas sisi tegak limas itu adalah ... cm^2.

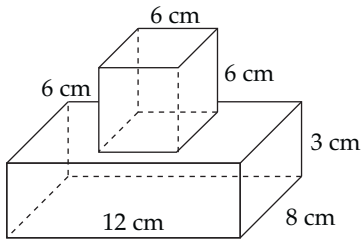
a. 520
b. 390
c. 260
d. 130

32. Sebuah limas alasnya berbentuk jajargenjang yang alas dan tingginya masing-masing 12 cm dan 10 cm. Jika volume limas itu 600 cm^3 maka tinggi limas tersebut adalah ... cm.

a. 30
b. 15
c. 10
d. 5

33. Volume limas $T.ABCD$ di bawah ini adalah 48.000 m^3. Jika alasnya berbentuk persegi dengan panjang sisi 60 m maka panjang garis TE adalah ... m.

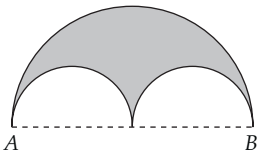
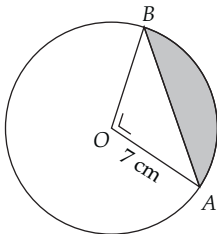
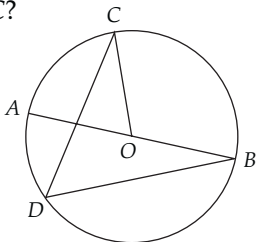
a. 10
b. 40
c. 50
d. 60

34. Pada gambar di bawah ini, panjang rusuk kubus $ABCD.EFGH$ adalah 12 cm. Volume limas $P.ABCD$ adalah ... cm^3.

a. 864
b. 576
c. 432
d. 288

35.

Gambar di samping adalah sebuah benda yang terdiri dari kubus dan balok dengan ukuran seperti pada gambar. Volume benda itu adalah ... cm^3.

a. 396
b. 456
c. 504
d. 528

B Esai

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini.

1. Sebuah sepeda mempunyai roda berjari-jari 21 cm. Berapa kali roda sepeda tersebut berputar untuk menempuh jarak 3,3 km?
2. Jika keliling daerah yang diarsir adalah 66 cm, berapa panjang AB?

3. Tentukan luas tembereng pada gambar berikut.

4. Jika besar $\angle BDC = 49^\circ$, berapa besar $\angle AOC$?

5. Dua buah lingkaran masing-masing berjari-jari 12 cm dan 2 cm. Panjang garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran 24 cm. Berapa jarak pusat kedua lingkaran itu?
6. Dua buah lingkaran masing-masing berjari-jari 2 cm. Jika jarak pusat kedua lingkaran 17 cm, tentukan panjang garis persekutuan dalamnya.
7. Andi mempunyai kawat sepanjang 500 cm. Andi akan membuat 3 kerangka balok berukuran 17 cm × 12 cm × 6 cm? Berapa sisa kawat yang dipunyai Andi?
8. Sebuah limas mempunyai alas berbentuk persegi dengan panjang sisi 14 cm. Jumlah luas sisi tegak limas adalah 700 cm^2. Tentukan volume limas tersebut.
9. Sebuah kubus memiliki volume 216 cm^3. Tentukan:
   a. panjang diagonal ruang kubus;
   b. luas permukaan kubus.
10. Sebuah balok memiliki luas alas 48 cm^2, luas sisi samping 30 cm^2, dan sisi depan 40 cm^2. Tentukan volume balok tersebut.

Daftar Pustaka

Bennett, Albert. 2001. *Mathematics for Elementary Teacher: A Conceptual Approach*. New York: McGraw-Hill.

Byrne, Richard. 1970. *Modern Elemetary Geometry.* New York: McGraw-Hill.

Departemen Pendidikan Nasional. 2006. *Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar untuk Bidang Studi Matematika Tingkat SMP dan MTs*. Jakarta: Badan Standar Nasional Pendidikan.

Dolciani. 1968. *More Topic in Mathematics. The National Council of Teacher of Mathematics Boston*: Houghton Mifflin Company.

________. 1985. *Pre-Algebra*. Boston: Hougton Mifflin Company

________. 1986. *Algebra I*. Boston: Hougton Mifflin Company

Dubich, Roy. 2000. *Teori Himpunan (dalam Ilmu Pengetahuan Populer 2)*. Jakarta: Grolier International, Inc.

Hall, 1995. *School Geometry*. New York: Macmilan.

Johnson, R.E. et.al. 1977. *Algebra, The Language of Mathematics Books 2*. Philipines: Adison Wesley Publishing Company Inc.

Lial, Miller. 1992. *Beginning Algebra*. New York: Harper Collins.

Negoro, ST. & B. Harahap. 1998. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

O. May, Kenneth. 1959. *Elements of Modern Mathematics*. Massachusetts Elementary Geometry.

Rising, Gerald R. et.al. 1996. *Unified Mathematics Book 2*. Boston: Hougton Miffin Company.

________. 1996. *Unified Mathematics Book 2*. Boston: Hougton Mifflin Company

Singerman, David. 2001. *Basic Algebra and Geometry. England*: Pearson Education Limited.

Sonna Bend, Thomas. 1993. *Mathematics for Elementary Teachers*. Philadelpia: Sonder College Publishing.

________. 1989. *Practical Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston Inc

Teh Keng Seng & Looi Chin Keong. 1992. *New Sylabus D. Mathematics I*. Singapore: Shing Lee Publisher Pte. Ltd.

Yunker, Lee. 1986. *Algebra 2 with Trigonometry: Application and Connections*. New York: McGraw-Hill.

Sumber Gambar Sampul Depan

coreldraw 11 photo and object cd

janedark.com

nyrealestatelawblog.com

Glosarium

akar kuadrat (98) : kebalikan dari operasi kuadrat

bidang frontal (174) : bidang yang tampak jelas pada gambar

bidang ortogonal (174) : bidang yang tampak tegak lurus pada bidang frontal

binomial (3) : bentuk aljabar yang mempunyai suku banyak dengan dua suku

diameter (124) : garis lurus yang melalui titik pusat lingkaran dan menghubungkan dua titik berbeda pada keliling lingkaran

domain atau daerah asal (34) : himpunan yang dipasangkan ke himpunan lainnya

faktor (2) : suatu bilangan yang membagi habis bilangan lain

fungsi atau pemetaan (35) : relasi yang memasangkan setiap anggota domain tepat satu ke anggota kodomain

garis singgung lingkaran (147) : suatu garis yang memotong lingkaran hanya di satu titik dan tegak lurus dengan jari-jari lingkaran pada titik singgung lingkaran itu

gradien (60) : ukuran kemiringan (kecondongan) dari suatu garis lurus dan biasanya dinotasikan dengan m

jaring-jaring (177) : bagian-bagian dari bangun ruang yang digunting pada sebagian rusuknya sehingga menjadi sebuah bangun datar yang tidak terpisahkan

kuadrat (96) : bilangan yang merupakan hasil kali dari bilangan yang sama sebanyak dua kali

lingkaran (124) : tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap satu titik tertentu

pecahan rasional aljabar (23) : bilangan perbandingan dua suku banyak dengan pembilang dan penyebut

pemfaktoran (11) : mengubah bentuk penjumlahan suku-suku menjadi perkalian faktor-faktornya

perbandingan proyeksi (174) : perbandingan antara rusuk kubus yang sebenarnya dan rusuk kubus yang akan digambar

persamaan linear dua variabel (80) : persamaan yang mempunyai dua variabel, dengan masing-masing variabel memiliki pangkat tertinggi satu dan tidak ada perkalian di antara kedua variabel tersebut

polinomial (3) : bentuk aljabar yang mempunyai suku-suku yang tidak sejenis lebih dari satu

relasi dari himpunan A ke B (30) : hubungan anggota himpunan A dan B yang berpasangan

sistem dalam SPLDV (81) : keterkaitan satu sama lain antara kedua PLDV

sudut pusat (129) : sudut yang dibentuk oleh dua buah jari-jari lingkaran dengan titik sudutnya pada pusat lingkaran dan menghadap busur yang kecil

sudut surut (174) : sudut antara garis ortogonal dan garis horizontal pada bidang frontal

tembereng (133) : daerah yang dibatasi oleh tali busur dan busur

trinomial (3) : bentuk aljabar yang mempunyai suku banyak dengan tiga suku

Daftar Simbol dan Notasi

Simbol dan Notasi	Definisi	Hal.	Simbol dan Notasi	Definisi	Hal.
a^x	a pangkat x	10	$\frac{a}{b}$	pecahan biasa	10
$\sqrt{b}$	akar kuadrat b	45	$a\frac{b}{c}$	pecahan campuran	98
$n(A)$	banyaknya anggota himpunan A	40	:	pembagian	10
a^2	bilangan kuadrat	2	$-$	pengurangan, minus, negatif	2
D_f	daerah asal	34	$+$	penjumlahan, plus, positif	2
R_f	daerah hasil	34	$\times$	perkalian	5
$\mid$	dengan	34	□	persegi	97
$^\circ$	derajat	102	▭	persegi panjang	6
$\in$	elemen atau anggota himpunan	6	%	persen	85
!	faktorial	43	$=$	sama dengan	2
$f(x)$	fungsi dari x	36	Δ	segitiga	97
m	gradien	60	//	sejajar, saling lepas	170
$-a$	lawan dari a	4	$\angle$	sudut	102
$>$	lebih besar	104	∟ , ┐	sudut siku-siku	97
$\geq$	lebih besar atau sama dengan	98	$\perp$	tegak lurus	103
$<$	lebih kecil	102	$\neq$	tidak sama dengan	18
(x, y)	pasangan berurutan	33			

KUNCI JAWABAN

Uji Kompetensi BAB 1

A. *Pilihan Ganda*

1. a
3. c
5. b
7. c
9. c
11. c
13. c
15. b
17. d
19. a

B. *Esai*

1. a. $2x^3 + 7x^2 - 3x - 4$
   b. $6x^2 + 10x + 3$

3. a. $49a^2 - 16$
   b. $a^2 - 8a + 7$
   c. $a^2 + 2ab - 2bc - c^2$
   d. $u^2 - 6u + 9 - v^2$

5. a. $(a - b)(x + y)$
   b. $(a - 1)(x + 1)$
   c. $(a + 2c)(a - x)$
   d. $(1 - x^2)(6 - x)$
   e. $(x - a)(2x - b)$

7. a. $(4x + 3)(x + 5)$
   b. $(4x - 2y)(3x - 5y)$
   c. $(2ab - 1)(2ab - 7)$
   d. $(10x - 14y^2)(10x + 14y^2)$

9. a. $2t + 5$
   b. $\dfrac{2(y + 4)}{y(y - 2)}$

Uji Kompetensi BAB 2

A. *Pilihan Ganda*

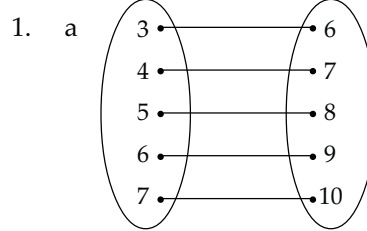
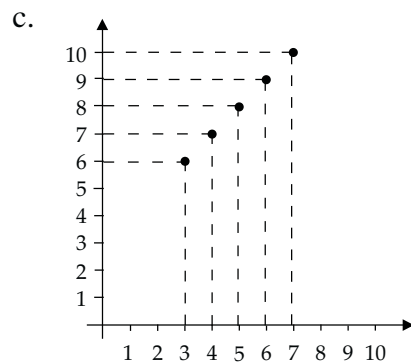
1. b
3. b
5. a
7. d
9. a
11. b
13. d
15. b
17. b
19. a

B. *Esai*

1. a

Gambar

   b. $A \times D = \{3, 6\}, (4, 7\}, \{5, 8\}, \{8, 9\}, \{7, 10\}$.

   c.

Gambar Grafik

3. a. $f(5) = 5$
   $f(-2) = -9$
   $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{-7}{2}$

   b. $f(x) = 0$ saat $x = \dfrac{5}{2}$

   c. $a = \dfrac{15}{2}$

5. a. $x + 4$
   b. -27
   c. $a = 2$

7. $a = 1$
   $b = 5$

9. $h(-2) = 0$, $h(0) = \dfrac{1}{2}$ dan $h(18) = 5$

Uji Kompetensi BAB 3

A. *Pilihan Ganda*

1.	d	11.	d
3.	b	13.	c
5.	c	15.	c
7.	a	17.	c
9.	b	19.	a

B. *Esai*

1. a. $\frac{1}{2}$
   b. $\frac{4}{3}$
   c. 9
   d. ∞
3. a. tidak tegak lurus
   b. tegak lurus
   c. tidak tegak lurus
   d. tegak lurus
   e. tidak tegak lurus
5. $a = 3$
7. a. (4, 1)
   b. $\left(\frac{-7}{10}, \frac{8}{5}\right)$
   c. (2, –1)
   d. $\left(\frac{84}{41}, \frac{18}{41}\right)$
   e. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
9. $y = \frac{1}{4}x + 1$

Uji Kompetensi BAB 4

A. *Pilihan Ganda*

1.	c	11.	b
3.	c	13.	b
5.	a	15.	a
7.	d	17.	d
9.	b	19.	d

B. *Esai*

1. a. *PLDV*
   b. *PLDV*
   c. *PLDV*
   d. bukan *PLDV*
   e. *PLDV*
   f. *PLDV*
   g. bukan *PLDV*
   h. *PLDV*
   i. bukan *PLDV*
   j. *PLDV*
3. a. $x = \frac{13}{80}$ dan $y = \frac{57}{80}$
   b. $x = \frac{72}{71}$ dan $y = \frac{-13}{710}$
   c. $x = 5\frac{1}{2}$ dan $y = \frac{1}{2}$...
   d. $x = -\frac{29}{50}$ dan $y = -\frac{3}{5}$
   e. $x = 4$ dan $y = 7$
5. a. $x = \frac{3}{2}$ dan $y = 0$
   b. $x = \frac{1}{4}$ dan $y = \frac{1}{2}$
   c. $x = -\frac{7}{3}$ dan $y = -\frac{10}{3}$
   d. $x = 1$ dan $y = \frac{5}{4}$
   e. $x = \frac{2}{3}$ dan $y = \frac{25}{3}$
7. a. $x = \frac{1}{7}$ dan $y = 3\frac{4}{7}$
   b. $x = 1$ dan $y = 2$
   c. $x = \frac{1}{2}$ dan $y = -3$
   d. $x = 1\frac{1}{2}$ dan $y = 3$
   e. $x = -5$ dan $y = -2$

9. a. $x = 5$ dan $y = 1$
   b. $x = 10$ dan $y = 2$
   c. $x = \frac{3}{10}$ dan $y = \frac{-4}{10}$
   d. $x = 2$ dan $y = -1$
   e. $x = 3$ dan $y = 17$

Uji Kompetensi BAB 5

A. Pilihan Ganda

1. b
3. a
5. c
7. b
9. a
11. c
13. b
15. a
17. c
19. b

B. Esai

1. a. 20
   b. 12
   c. 15
   d. 12
   e. 40
3. a. 4
   b. $2\sqrt{29}$
   c. $6\sqrt{5}$
5. $OD = 40\sqrt{4}$
7. Diagonal bidang = $12\sqrt{2}$ cm
   Diagonal ruang = $12\sqrt{3}$ cm
9. Tinggi segitiga = $5\sqrt{3}$ cm
   Luas segitiga = $25\sqrt{3}$ cm

Latihan Ulangan Umum Semester 1

A. Pilihan Ganda

1. b
3. c
5. b
7. b
9. d
11. c
13. b
15. a
17. b
19. c
21. c
23. c
25. a
27. b
29. a
31. c
33. c
35. d

B. Esai

1. $\frac{x + 5}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)}$
3. {3, 4, 5, 6, 7}
5. a. $\frac{1}{2}$
   b. $y = -2x + 5$
7. a. {(4, 7)}
   b. {(4, 12)}
9. 4 dan 60 cm^2

Uji Kompetensi BAB 6

A. Pilihan Ganda

1. a
3. d
5. d
7. d
9. c
11. d
13. d
15. d
17. b
19. d

B. Esai

1. a. 7 cm
   b. 24 cm
3. 154 cm^2
5. 1.232 cm^2

Uji Kompetensi BAB 7

A. Pilihan Ganda

1. b
3. a
5. b
7. d
9. d
11. c
13. a
15. a
17. c
19. d

B. Esai

1. 32 cm
3. 12 cm, 12 cm, dan 9,22 cm
5. 112 cm dan 768 cm^2
7. 24 cm
9. 20 cm

Uji Kompetensi BAB 8

A. Pilihan Ganda

1.	b	11.	c
3.	c	13.	d
5.	d	15.	d
7.	d	17.	b
9.	b	19.	d

B. Esai

1. 600 cm^2 dan 1.000 cm^3
3. 13,5 menit
5. a. 150 cm^2
   b. 102 cm^2
   c. $24\sqrt{29}$ cm^2
7. *C, C, D, H, E*
   E, B, C, D, H
9. 480 cm^3

Uji Kompetensi BAB 9

A. Pilihan Ganda

1.	d	11.	b
3.	b	13.	b
5.	b	15.	b
7.	b	17.	d
9.	c	19.	b

B. Esai

1. a. 400 cm^3
   b. 360 cm^2
3. 1.416 cm^2
5. 222 cm^2
7. 240 cm^3
9. $\frac{1}{2} a^2 (8 + \sqrt{3})$

Latihan Ulangan Umum Semester 2

A. Pilihan Ganda

1.	d	19.	d
3.	b	21.	c
5.	c	23.	b
7.	b	25.	d
9.	d	27.	d
11.	c	29.	c
13.	d	31.	c
15.	b	33.	c
17.	c	35.	c

B. Esai

1. 2.500 kali
3. 14 cm^2
5. 26 cm
7. 80 cm
9. a. $6\sqrt{3}$ cm
   b. 216 cm^2

Indeks

aljabar 1, 2, 3
apotema 124
asosiatif 3
balok 109, 111, 166
bidang frontal 174, 175, 176
 ortogonal 174, 176
binomial 3
blaise pascal 9
busur 124, 138
cartesius 29, 31, 32
daerah asal 29, 33, 34
 hasil 33, 34
 kawan 29, 33, 34
diagonal bidang 109, 110, 111
diameter 113, 124, 126
diagram panah 29, 31, 33
distributif 4
domain 32, 34
eksponen 8
eliminasi 84, 85
faktor 2, 11, 14
 persekutuan 10, 11
faktorisasi 11, 24
fungsi 29, 30, 32
garis 55, 56, 57
 ortogonal 174
 persekutuan dalam 154, 155, 156
 persekutuan luar 152, 153, 156
 singgung 145, 146, 147
gradien 55, 56, 60
grafik 56, 57, 68
himpunan 30, 31, 32
hypotenusa 100, 102
jari-jari 36, 124, 125
juring 124, 130, 131
keliling 124, 125, 126
kodomain 34
koefisien 2, 9, 15
komutatif 3
konstanta 2, 17, 56
koordinat 56, 57, 59
korespondensi satu-satu 43, 44, 49
kuadrat 12, 96, 97
kubus 109, 110, 166
limas 112
linear 81, 82, 83
lingkaran 36, 113, 123
luas 36, 97, 99
 permukaan 112, 181, 182
pasangan berurutan 29, 31, 33
pecahan 19, 20, 23
pemetaan 34, 35, 36
persamaan 55, 56, 57
polinomial 3
pythagoras 95, 99, 100
range 34, 35
relasi 29, 30, 31
rusuk 101, 110, 111
sejajar 62, 63, 64
sisi 104, 111, 167
 miring 100, 103, 108
 siku-siku 100, 108
substitusi 66, 67, 68
sudut pusat 129, 130, 132
 surut 174, 175
suku 2, 3, 4
sumbu 32, 62
tali busur 124, 128
tegak lurus 64, 65, 73
tembereng 124, 133
tinggi 111, 112, 113
titik pusat 124, 146
 sudut 129, 166, 169
trionomial 3
variabel 2, 9, 56
 bebas 36
 bergantung 36
volume 1, 50, 184

ISBN 978-979-095-661-2 (no.jil.lengkap)
ISBN 978-979-095-663-6 (jil.2.1)

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui **Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 32 Tahun 2010 tanggal 12 November 2010**

Harga Eceran Tertinggi (HET) Rp.14.165,00